CURSO DE MATEMÁTICA BÁSICA:

ÁLGEBRA

DESARROLLA EN FORMA RESUMIDA CADA UNIDAD CON:

I. GUIONES DE CONFERENCIAS

II. FICHAS DE ESTUDIO

III. LABORATORIOS DE EJERCICIOS

Trata las unidades siguientes:

UNIDAD 6: LOS POLINOMIOS

UNIDAD 7: ECUACIONES E INECUACIONES POLINÓMICAS

UNIDAD 8: EXPRESIONES RACIONALES ALGEBRAICAS

UNIDAD 9: EXPRESIONES IRRACIONALES ALGEBRAICAS

CURSO DE MATEMÁTICA BÁSICA:

ÁLGEBRA

UNIDAD 6: LOS POLINOMIOS

"Las matemáticas son el alfabeto
con que Dios creó el Universo"
Galileo.

GUION DE CONFERENCIA No. 8

POLINOMIOS
GENERALIDADES
OPERACIONES
Contenidos y Láminas No. 6.1 a 6.3

FICHAS DE ESTUDIO DE LOS POLINOMIOS

I OBJETIVOS

II ACTIVIDADES DE PREPARACIÓN

III ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

LABORATORIOS

CUESTIONARIO No. 8

RESPUESTAS

UNIDAD 6:	GUION DE CONFERENCIA No. 8 LOS POLINOMIOS
TEMA: POLINOMIOS GENERALIDADES OPERACIONES	**CONTENIDO:** * Polinomios y sus características * Operaciones con Polinomios. * División Euclídea en los Polinomios.

DESARROLLO.	RECURSO
1. POLINOMIOS. * Expresión algebraica: + Características: variable, constante y símbolos operatorios. + Clasificación de las expresiones algebraicas * Polinomios: + Monomios y sus características. + Polinomios y sus características.	**Lámina 6.1**
2. Operaciones con Polinomios. * Suma. Propiedades de la suma. * Multiplicación. Propiedades de la multiplicación. * Productos notables.	**Lámina 6.2**
3. División Euclídea en los Polinomios. * Factorización de Polinomios. * Algoritmos de la División. * División sintética.	**Lámina 6.3**

LÁMINA DE PRESENTACIÓN

CONFERENCIA No. 8

UNIDAD 6: LOS POLINOMIOS

CONTENIDO:

* Polinomios y sus características

* Operaciones con Polinomios.

* División Euclídea en los Polinomios.

LÁMINA 6.1

1. **EXPRESION ALGEBRAICA**: Combinación de números y letras ligados con signos de operaciones algebraicas.

Ejemplos: $A = \pi r^2$, $x^2/(1 + x^3)$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Observaciones: los números son las constantes, 2, π; las letras son las variables, indeterminadas o incógnitas, r, x, y; y las operaciones algebraicas están representadas por: +, -, ×, ÷, $\sqrt{\ }$.

No son expresiones algebraicas: $x^{\sqrt{3}}$, log (sen x/6)

En las expresiones algebraicas racionales o irracionales, la más simple es la llamada **monomio**, como πr^2.

2. **MONOMIO**: es la expresión algebraica de la forma $\mathbf{ax^n}$, donde $\mathbf{a} \in \Re$ es el **coeficiente**, y $\mathbf{x^n}$ es la **parte literal** en la indeterminada x con exponente $n \in N$, que indica el grado del monomio igual a n.

$3x^5$ es un monomio de grado 5, pero x^2y^3 también es un monomio de grado 5.

$\sqrt{2}$ es un monomio de grado 0. Toda constante no cero tiene grado cero.

3. **MONOMIOS SEMEJANTES**: cuando tienen la misma parte literal.

$3x^4$, $-(2/3)x^4$ son monomios o términos semejantes y pueden reducirse a un solo monomio: $3x^4 - (2/3)x^4 = (7/3)x^4$

4. **POLINOMIOS**: suma de monomios. Cada monomio es un término del polinomio.

BINOMIO: $5x^3 - 3x$ TRINOMIO: $5x^3 - 3x + \sqrt{7}$

La representación normal o canónica de un polinomio en x sobre $\Re$, se simboliza por:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \text{ donde } a_n, a_{n-1}, ..., a_0 \in \Re, a_n \neq 0.$$

Generalidades: El $gr[p(x)] = n$.

a_nx^n es el término principal y a_n es el coeficiente principal.

Si $a_n = 1$, entonces el polinomio es mónico.

a_0 es el término independiente o constante y su grado es cero.

Si $p(x) = -5x^3 - 3x^2 + 6$, entonces

$gr[p(x)] = 3$, coeficiente principal $a_n = -5$, p(x) no es mónico,

$a_2 = -3$, $a_1 = 0$, $a_0 = 6$. El polinomio está en forma canónica.

Un polinomio se dice que está en forma canónica o normal si:

1o. está ordenado decreciente con respecto a los exponentes de sus términos.

2o. se reducen los términos semejantes y se omiten los términos con coeficiente cero.

Cuando estos se escriben se dice polinomio completo.

Nota: En los polinomios no existe la relación de orden > ó <, pero si es importante el grado del polinomio. Dos polinomios son iguales si tienen los mismos términos.

LÁMINA 6.2

1. **SUMA DE POLINOMIOS**: se reducen sus términos o monomios semejantes y se copian los demás términos. Para la resta de polinomios se cambian los signos de los términos del sustraendo y se suman al sustraendo.

Ejemplos: Si $p(x) = 3x^3 - ½x^2 - 4$, $g(x) = -7x^3 + 3x - 2$, entonces:

$$\begin{array}{r} p(x) = 3x^3 - ½x^2 + 0x - 4 \\ g(x) = -7x^3 + 0x^2 + 3x - 2 \\ \hline p(x)+g(x) = -4x^3 + ½x^2 + 3x - 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} p(x) = 3x^3 - ½x^2 + 0x - 4 \\ -g(x) = 7x^3 + 0x^2 - 3x + 2 \\ \hline p(x) - g(x) = 10x^3 - ½x^2 - 3x - 2 \end{array}$$

$$gr[p(x) \pm g(x)] \leq \text{Máx. } gr\,[p(x), g(x)]$$

2. **PROPIEDADES**: Las mismas de los enteros, como las de cierre, asociativa, conmutativa. El elemento neutro es el polinomio cero, $p(x) = 0$ (sin grado): $p(x) + 0 = 0 + p(x) = p(x)$

3. **MULTIPLICACION DE POLINOMIOS**.

Empecemos por la multiplicación de monomios: $ax^n \times bx^m = ab\, x^{n+m}$

Multiplicación de polinomios: cada término del primer factor se multiplica por todos los términos del segundo factor y al final se reducen los términos semejantes: $(3x^5 - 6x^2)(2x^3 - x) = 6x^8 - 3x^6 - 12x^5 + 6x^3$

$$gr\,[p(x)\, g(x)] = gr\,[p(x)] + gr\,[g(x)]$$

PROPIEDADES: Cierre, asociativa, conmutativa.

Elemento neutro: polinomio $p(x) = 1$, de grado cero.

Los polinomios de grado mayor que cero no tienen inverso.

Sólo los polinomios de grado cero, es decir los números reales no nulos, tienen inverso. Los reales son las unidades de los polinomios como 1 y -1 son las unidades de los enteros.

Propiedad distributiva: $3x^2(2x^4 - 5x) = 6x^6 - 15x^3$

4. **PRODUCTOS NOTABLES**:

$a(b + c)$	$= ab + ac$
$(a + b)(c + d)$	$= ac + (ad + bc) + bd$
$(a + b)(a - b)$	$= a^2 - b^2$
$(a + b)(a + b) = (a + b)^2$	$= a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)(a - b) = (a - b)^2$	$= a^2 - 2ab + b^2$
$(a + b)(a + b)^2 = (a + b)^3$	$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a - b)(a - b)^2 = (a - b)^3$	$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$(a + b)(a^2 - ab + b^2)$	$= a^3 + b^3$
$(a - b)(a^2 + ab + b^2)$	$= a^3 - b^3$

LÁMINA 6.3

1. **DIVISIÓN DE POLINOMIOS**. Para dividir polinomios se emplea el algoritmo de Euclides y se tiene que dados el dividendo $D(x)$ y el divisor $d(x)$, se obtiene el cociente $q(x)$ y el residuo $r(x)$ tales que:

$$D(x) = d(x)\, q(x) + r(x) \quad \text{tal que } r(x) = 0 \text{ ó } gr\,[r(x)] < gr\,[d(x)]$$

1. Si $r(x) = 0$, entonces la división es exacta.
2. Si $r(x) \neq 0$, entonces la división es inexacta.

En algunos casos se puede saber cuando un polinomio es divisor o factor de otro. Tampoco es fácil declarar un polinomio como primo o compuesto, pero no hay duda de que un polinomio de primer grado es primo como también una suma de cuadrados. $3x + 1$, $x^2 + 4$ son primos.

Las reglas para factorizar polinomios no son tan prácticas como las dadas en los enteros. Aquí se usa mucho el "tanteo" y la habilidad se desarrolla haciendo muchos ejercicios.

$ab + ac$	$= a(b + c)$	Ejemplo: Factorice
$a^2 - b^2$	$= (a + b)(a - b)$	
$a^2 + 2ab + b^2$	$= (a + b)^2$	1. $3m^2 + m \;= m(3m + 1)$
$a^2 - 2ab + b^2$	$= (a - b)^2$	2. $3m + 1 \;= 3(m + 1/3)$
$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$= (a + b)^3$	
$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$= (a - b)^3$	3. $x^4 + x^2y^2 + y^4 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2$
$a^3 + b^3$	$= (a + b)(a^2 - ab + b^2)$	$= (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2$
$a^3 - b^3$	$= (a - b)(a^2 + ab + b^2)$	$= [x^2 + y^2 + xy]\,[x^2 + y^2 - xy]$

2. **ALGORITMO DE LA DIVISIÓN DE POLINOMIOS**: Tanto el dividendo como el divisor deben estar ordenados y se procede en forma semejante a la división de enteros; el residuo debe tener grado menor que el del divisor.

Ejemplo: Dividir $D(x) = 5x^3 + 3x - 2$ entre $d(x) = 2x^2 + 3x - 1$

$$\begin{array}{l|l}
5x^3 + \;\; 0\,x^2 \;\; + \; 3\,x \; - \; 2 & 2x^2 + 3x - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{-5x^3 - 15/2\,x^2 + \; 5/2\,x} & 5/2\,x - 15/4 \\
\quad - 15/2\,x^2 \;+ 11/2\,x - 2 & \\
\quad \underline{+ 15/2\,x^2 \;+ 45/4\,x - 15/4} & \\
\qquad\qquad\qquad 67/4\,x - 23/4 \;\leftarrow \text{residuo} &
\end{array}$$

Entonces $D(x) = d(x)[(5/2)\,x - 15/4\,] + [(67/4)x - 23/4]$

3. **DIVISIÓN SINTÉTICA** (o regla de Ruffini): Es el método para abreviar la división de un polinomio entre otro de primer grado y mónico.

Dividir $D(x) = 2x^4 - 17x^2 + 6x - 5$

entre $d(x) = x - 3$, entonces

2	0	-17	6	- 5	
	6	18	3	27	3
2	6	1	9	**22**	← residuo

$q(x) = 2x^3 + 6x^2 + x + 9$, $r = 22$

Se puede dividir entre un divisor no mónico, dividiendo el divisor y el cociente por su coeficiente.

$4x^3 + 4x^2 - 2$ entre $2x + 3$, entonces

4	4	0	- 2	
	- 6	3	- 9/2	- 3/2
4	- 2	3	**-13/2**	

$q(x) = 2x^2 - x + 3/2$, $r = -13/2$

FICHA DE ESTUDIO No.6
UNIDAD 6: EL CONJUNTO DE LOS POLINOMIOS

Lámina 6.1	Expresión Algebraica: Polinomio

NOMBRE____________________________________FECHA____________________

I OBJETIVOS:

Al concluir esta guía podrás:

1. Determinar expresiones algebraicas y sus elementos.
2. Determinar monomios semejantes y efectuar reducciones de los mismos.
3. Comprender lo que es un polinomio, sus características y sus elementos.

II ACTIVIDADES DE PREPARACION.

1. Estudia en un Texto lo siguiente:

* Expresión algebraica: variable y constante.
* Definición de monomio e identificación de sus términos o elementos.
* Monomios semejantes y la reducción de monomios semejantes.
* Definición de polinomio y su forma normal o canónica.
* Definiciones del grado y elementos de un polinomio.

2. Desarrolla los ejercicios en tu cuaderno.

III ACTIVIDADES DE EVALUACION.

1. Escribe cada proposición como una expresión algebraica utilizando el signo igual y las variables apropiadas:

a) La suma de tres números pares consecutivos es igual a 66.

b) Cierto número menos 6 es igual a 5 veces otro número que es igual a 7 más el primero.

c) El cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadrado del primer número, más el doble producto del primero multiplicado por el segundo, más el cuadrado del segundo número.

2. Escriba las siguientes expresiones como una proposición, donde a y b son números reales:

a) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

b) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

c) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

3. Con las siguientes expresiones:

a) $\frac{1}{x}$

b) $x^2 - \sqrt{3} + 5x - 1 + 3x^2 - x$

c) log x

d) $\frac{x^2 + 3x - 5}{x - 1}$

e) $1 - 3x^3 + x^4$

f) x^2y^3

Contesta:

i) ¿Cuáles son expresiones algebraicas y cuáles no lo son?
ii) ¿Cuáles son constantes y cuáles son variables de las expresiones algebraicas?
iii) ¿Cuáles son monomios? iv) ¿Cuáles son polinomios?
v) Expresa los polinomios en forma normal o canónica.
vi) Indica el grado de cada polinomio.
vii) Indica los polinomios mónicos.
viii) Indica el coeficiente principal y el término independiente de cada polinomio.

4. ¿Por qué los números reales se consideran como polinomios?

5. ¿Cuál es el grado del polinomio cero?

6. Encuentra el valor de k si $x^3 - 3x + 2 = x^3 + (k - 1) x + 2$.

7. Define los conjuntos Q[x] y Z[x] de polinomios.

Lámina 6.2 (A)	**Operaciones con polinomios**

NOMBRE______________________________________**FECHA**_____________________

I OBJETIVOS:

Al concluir esta guía podrás:

1. Efectuar operaciones con polinomios.
2. Identificar la estructura operatoria de los polinomios.

II ACTIVIDADES DE PREPARACION.

1. Estudia en un Texto lo siguiente:

* La suma de polinomios y el grado de una suma.
* Las propiedades de la suma y la definición de resta de polinomio.
* Multiplicación de polinomios y el grado del producto.
* Propiedades de la multiplicación.
* Determinar los reales no ceros como las unidades de los polinomios.

2. Desarrolla los ejercicios en tu cuaderno.

III ACTIVIDADES DE EVALUACION.

1. Opera y reduce términos semejantes:

a) $3x - [y - (x - 2y)] - [2x - (y - 2x)]$

b) $6 - 5 \{a + 2 [3b - 2(a - 1)] + 2(a - b) - 1\}$

c) $3x^2 - 2 \{x - x [x + 4(x - 3)] - 5\}$

d) $-2^2a^3(ab^3)^2$

e) $(2ab)^4(-a^3b)^2 - (-3a^2)^3(a^2b^3)^2$

2. Con los polinomios siguientes:

$P(x) = x^2 - 1$ $\quad\quad$ $Q(x) = - 3x^3 + 4x^2 - x - 2$ $\quad\quad$ $R(x) = 4x - 1$

Efectúa las operaciones indicadas:

a) $P(x) + [Q(x) + R(x)]$
b) $2 \cdot P(x) + 3 \cdot R(x)$
c) $P(x)[-R(x)]$

3. Compara las propiedades de la suma de polinomios con las propiedades de la suma de enteros.

4. Compara las propiedades de la multiplicación de polinomios con las propiedades de la multiplicación de enteros.

5. Con los mismos polinomios del ejercicio 2, verifica que:

$$P(x) \cdot [Q(x) + R(x)] = P(x) \cdot Q(x) + P(x) \cdot R(x)$$

6. Multiplica $[(3x - 2)/4 - (2x - 1)/6]$ por 12 y reduce términos semejantes.

7. Efectúa

a) $(3x - 2)^2 =$ $\quad\quad$ b) $(2a + 1/3)^3 =$

8. La altura de un rectángulo mide 5 metros menos que su base. Si x es la base del rectángulo, escribe: a) una expresión algebraica que represente el perímetro p del rectángulo y simplifica la expresión; y b) otra expresión que represente su área A.

9. Un conjunto de monedas está formado por monedas de 5, 10 y 20 centavos. Hay 5 monedas de 10 centavos menos que las monedas de 5 centavos, 2 monedas más de 20 centavos que las de 10. Si x es el número de monedas de 5 centavos, escriba una expresión que represente el valor en centavos de las monedas. Simplifique la expresión.

Lámina 6.2 (B)	Productos Notables y Factorización

NOMBRE____________________________________**FECHA**____________________

I OBJETIVOS:

Al concluir esta guía podrás:

1. Utilizar algunas reglas para obtener el producto de ciertos factores por simple inspección.
2. Utilizar el proceso inverso para obtener los factores de algunas expresiones.

II ACTIVIDADES DE PREPARACION.

1. Estudia en un Texto lo siguiente:

* La propiedad distributiva y el factor común.
* Reglas para multiplicar binomios de primer grado.
* Factorización de trinomios cuadrados por "tanteo".
* Teorema del Binomio, en especial al cuadrado y al cubo.
* Factorización de trinomios cuadrados perfectos.
* Factorización de diferencia de cuadrados y de suma y diferencia de cubos y otros casos particulares.

2. Desarrolla los ejercicios en tu cuaderno.

III ACTIVIDADES DE EVALUACION.

1. Si $a(b + c) = ab + ac$, pruebe que $a(b + c + d) = ab + ac + ad$

2. Efectúe por simple inspección:

a) $3x^2(2x - 1)$ b) $- 2x(- 3x^2 + x - 1)$

3. A partir de la fórmula $ab + ac = a(b + c)$, factorice:

a) $6x^2 - 15x$ b) $5x(x - 1) - (x - 1)$

c) $9x^4 - 6x^3y - 6x^2y^2$ d) $(2y^2 - 10y) - (3y - 15)$

4. Efectúa la multiplicación y factorizando, comprueba que:

$(ax + b)\cdot(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$

5. Escribe la fórmula del ejercicio anterior, si $a = c = 1$

6. Efectúa por simple inspección:
a) $(x - 2)(x + 3)$ b) $(2x - 5)(3x - 1)$

7. Analiza los trinomios de segundo grado de acuerdo a la fórmula de los factores:

a) $x^2 + bx + c$ b) $ax^2 + bx + c$

8. Factoriza:

a) $x^2 + 8x - 9$ b) $x^2 - 32 - 4x$

c) $x^2 + 18xy + 72y^2$ d) $x^2 - 11xy - 42y^2$

e) $6x^2 + 24x + 18$ f) $3x^2 - 24x + 21$

g) $3x^2y^2 + 11xy + 6$ h) $4x^2y^2 - 21xy - 18$

9. Encuentra todo entero b, tal que la expresión $x^2 + bx + 12$ sea factorizable.

10. Aplica la fórmula del binomio al cuadrado, para obtener el resultado de:

a) $(2a + 5b)^2 =$ b) $(2a - ½)^2 =$

11. Analiza las características del trinomio cuadrado perfecto.

12. Obtén por simple inspección el resultado de:

a) $(3a + ½)(3a - ½) =$ b) $(3/4 - 2m)(3/4 + 2m) =$

13. Factoriza completamente:

a) $4x^2 - 9$ b) $x^2y^4 - 16$

c) $4x^2 - 20x + 25 - y^2$ d) $x^4 + x^2 + 1$

14. Encuentre, por simple inspección, el producto de:

a) $(2x + 3)^3$ b) $(x^2 - 2y)^3$

c) $(3x + 2)(9x^2 - 6x + 4)$ d) $(x^2 + 5x + 25)(x - 5)$

15. Factoriza:

a) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

b) $27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$

c) $27x^3 - 64y^6$

d) $64x^3y^6 + 8$

Lámina 6.3	División de Polinomios

NOMBRE____________________________________FECHA____________________

I OBJETIVOS:

Al concluir esta guía podrás:

1. Determinar el cociente y el residuo en la división Euclídea de polinomios.
2. Aplicar el algoritmo de la división sintética.

II ACTIVIDADES DE PREPARACION.

1. Estudia en un Texto lo siguiente:

* División de dos monomios y repaso de las propiedades de los exponentes.
* Definición de división Euclídea de dos polinomios y sus términos.
* Propiedades de los factores de un polinomio y definición de unidades y polinomios primos.
* El algoritmo de la división de polinomios.
* Regla para la división sintética.

2. Desarrolla los ejercicios en tu cuaderno.

III ACTIVIDADES DE EVALUACION.

1. A partir de los ejercicios 3, 8, 13 y 16 de la ficha de estudio anterior, indica los polinomios que son factores o divisores del polinomio dado.

2. Compara los conceptos de factor y de múltiplo con lo estudiado en los enteros.

3. Utiliza la notación $D(x) = d(x) \cdot q(x)$.

4. ¿Cuándo sucede que $D(x) = d(x)\cdot q(x) + r(x)$ donde $r(x) \neq 0$?

5. ¿Por qué todo número real no cero es factor de un polinomio?
Escribe $p(x) = 2x^2 - 5x + 8$ como producto de
a) 2 por otro polinomio b) 3 por otro polinomio

6. Efectúa la división y expresa el resultado en la forma
$D(x) = d(x)\cdot q(x) + r(x)$

a) $6bx$ entre $-2b$ b) x^3y^4 entre $2x^2y^4$

c) $(x - 5)^3$ entre $(x - 5)^2$ d) $3x^2 - 5x$ entre $2x$

e) $x^3 - 4x - 2x^2 + 8$ entre $x - 4$ f) $6x^3 - 14x - 2$ entre $2x - 5$

7. Aplica el algoritmo de la división sintética para obtener:

a) $x^3 - 4x - 2x^2 + 8$ entre $x - 4$ b) $6x^3 - 14x - 2$ entre $x - 5/2$

8. ¿Cómo se relaciona el cociente del ejercicio 6 f) con el cociente del ejercicio 7 b)?
¿Cómo son sus residuos?

9.¿Cómo se relaciona el cociente de $D(x)$ entre $ax + b$ y el cociente de $D(x)$ entre $x + b/a$?

10. Utiliza la división sintética para dar el cociente y el residuo de $3x^3 - 6x + 5$ entre
a) $2x - 1$ b) $3x + 4$

LABORATORIO: CUESTIONARIO No. 8		UNIDAD 6 Examen de Fichas sobre Láminas 6.1 a 6.4
POLINOMIOS	Conferencia No. 8	CALIFICACIÓN:

DESARROLLO	CORRECCION
I Escriba su respuesta en el espacio dado (3% c/u) 1. Si el polinomio $p(x) = 5x^2 - x^3 + 3x^5 - \frac{1}{2}x - \sqrt{2} + 3$, entonces a) la forma canónica de p(x) = b) el gr [p(x)] = c) el coeficiente a_3 = d) el coeficiente a_4 = e) p(x) está definido sobre f) el término principal es g) el término independiente es 2. El grado del término $3x^2y^3z$ es 3. Si $q(y) = 3xy^4 + 5$, su coeficiente principal es y su indeterminada es **II** Operaciones con polinomios (10% c/u) 1. Si $p(x) = 3x^3 + 4x - 5$ y $q(x) = x^2 - 1$, entonces a) $p(x) - x\, q(x) =$ b) $p(x) \div q(x) =$	

III Productos Notables.

Dé el resultado por simple inspección (5% c/u)

a) $(2x - 0.5)^2 =$

b) $(0.3x + 0.1)(0.3x - 0.1) =$

c) $(2x - 3)(5x + 4) =$

d) $(x + \frac{1}{2})(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}) =$

e) $(2x + \frac{1}{2})^3 =$

IV Factorice las siguientes expresiones (5% c/u):

a) $x^2 - x + \frac{1}{4} =$

b) $8x^6 + 1 =$

c) $6x^2 - 11x - 10 =$

d) $x^3 - x^2 - x + 1 =$

e) $x^4 + x^2 + 1 =$

RESPUESTAS
UNIDAD 6: LOS POLINOMIOS.

Lámina 6.1

1. a) $2x + 2x + 2 + 2x + 4 = 66$ b) $x – 6 = 5y$, donde $y = 7 + x$ c) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.
2. a) El cuadrado de la diferencia de dos números es igual al cuadrado del primer número menos el doble producto del primero por el segundo número más el cuadrado del segundo.   b) La diferencia de los cuadrados de dos números es igual al producto de la suma de los números por su diferencia.
c) El cubo de la suma de dos números es igual al cubo del primer número más el triple del producto del cuadrado del primer número por el segundo, más el triple del producto del primero por el cuadrado del segundo número más el cubo del segundo número.
3. i) Excepto c), las demás son algebraicas   ii) Todos los números son constantes y las letras son variables   iii) f)   iv) b), e), f)   v) b) $4x^2 + 4x – (\sqrt{3} + 1)$ e) $x^4 - 3x^3 + 1$
vi) b) 2   e) 4   f) 5   vii) e) f)   viii) b) 4, $-(\sqrt{3} + 1)$ e) 1, 1   f) 1, 0.   **4**. Son polinomios de grado cero, excepto el cero.   **5**. El cero se define como un polinomio sin grado.   **6.** $k = - 2$ **7.** Q[x] : conjunto de polinomios con coeficientes racionales y Z[x]: polinomios con coeficientes enteros.

Lámina 6.2 (A)

1. a) $– 2y$ b) $21 + 5a – 20b$ c) $13x^2 - 26x + 10$ d) $– 4a^5 b^6$ e) $43a^{10} b^6$
2. a) $– 3x^3 + 5x^2 + 3x – 4$ b) $2x^2 + 12x – 5$ c) $– 4x^3 + x^2 + 4x – 1$.
3. Tienen las mismas propiedades: Asociativa, conmutativa, elemento neutro: 0, opuesto o negativos de los coeficientes.   **4.** Igual para la multiplicación.   **5.** Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición.   **6.** $5x – 4$ **7**. a) $9x^2 - 12x + 4$ b) $8a^3 + 4a^2 + 2/3\ a + 1/27$.
7. a) $p = 4x – 10$ b) $A = x^2 - 5x$ **9.** $S = 35x – 110$.

Lámina 6.2 (B)

1. Propiedad distributiva.   **2.** a) $6x^3 - 3x^2$ b) $6x^3 - 2x^2 + 2x$ **3.** a) $3x (2x – 5)$
b) $(x – 1) (5x – 1)$ c) $3x^2 (3x^2 - 2xy – 2y^2)$ d) $(y – 5) (2y – 3)$.   **4**. Efectúe.
5. $(x + b) (x + d) = x^2 + (b + d) x + bd$ **6.** a) $x^2 + x – 6$ b) $6x^2 - 17x + 5$
7. Infórmate en un Texto.   **8.** a) $(x + 9) (x – 1)$ b) $(x – 8) (x + 4)$ c) $(x + 12y) (x + 6y)$
d) $(x – 14y) (x + 3y)$ e) $6(x + 1) (x + 3)$ f) $3(x – 7) (x – 1)$ g) $(3xy + 2) (xy + 3)$
h) $(4xy + 3) (xy – 6)$.   **9**. b = 13, 8 ó 7   **10**. a) $4a^2 + 20ab + 25b^2$ b) $4a^2 - 2a + \frac{1}{4}$
11. Tiene tres términos, dos de ellos son positivos y cuadrados perfectos (por lo general se escriben en el primer y tercer lugar) y el otro término es el doble producto de las raíces de los cuadrados.
12. a) $9a^2 - \frac{1}{4}$ b) $\frac{9}{16} - 4m^2$ **13**. a) $(2x + 3 (2x – 3)$ b) $(xy^2 + 4) (xy^2 - 4)$
c) $(2x – 5 + y) (2x – 5 – y)$ d) no es factorizable o sea que es primo.
14. a) $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$ b) $x^6 - 6x^4 y + 12x^2 y^2 - 8y^3$ c) $27x^3 + 8$ d) $x^3 - 125$.
15. a) $(2x + 1)^3$ b) $(3x – 2)^3$ c) $(3x – 4y^2) (9x^2 + 12xy^2 + 16y^4)$
d) $(4xy^2 + 2) (16x^2 y^4 - 8xy^2 + 4)$.

Lámina 6.3

1., 2., 3., Son de análisis. **4**. Cuando d(x) y q(x) no son factores de D(x). **5.** a) $2(x^2 - \frac{5}{2}x + 4)$

b) $3(\frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{8}{3})$ **6.** a) (-2b) (-3x) b) $(2x^2y^4)(\frac{1}{2}x)$ c) $(x-5)^2(x-5)$

d) $2x(\frac{3}{2}x - \frac{5}{2})$ e) $(x-4)(x^2 + 2x + 4) + 24$ f) $(2x-5)(3x^2 + \frac{15}{2}x + \frac{47}{4}) + \frac{227}{4}$.

7. a) $(x-4)(x^2 + 2x + 4) + 24$ b) $(x - \frac{5}{2})(6x^2 + 15x + \frac{47}{2}) + \frac{227}{4}$. **8**. El cociente de 6f) es la mitad del 7b). Los residuos son iguales. **9**. El cociente de D(x) entre ax + b es igual al cociente de D(x) entre x + b/a divido por a. **10**. a) $2(x-\frac{1}{2})(\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{21}{8}) + \frac{19}{8}$

b) $3(x+\frac{4}{3})(x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{2}{9}) + \frac{53}{9}$.

Respuestas Cuestionario No. 8

I. 1. a) $p(x) = 3x^5 - x^3 + 5x^2 - \frac{1}{2}x + (3 - \sqrt{2})$ b) 5 c) – 1 d) 0 e) $\Re$ f) $3x^5$

g) $(3 - \sqrt{2})$ **2**. 6 **3.** 3x, y

II. a) $2x^3 + 3x - 5$ b) 3x, residuo 7x – 5.

III. a) $4x^2 - 2x + 0.25$ b) $0.09x^2 - 0.01$ c) $10x^2 - 7x - 12$ d) $x^3 + \frac{1}{8}$

e) $8x^3 + 6x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{8}$.

IV. a) $(x - \frac{1}{2})^2$ b) $(2x^2 + 1)(4x^4 - 2x^2 + 1)$ c) $(3x + 2)(2x-5)$ d) $(x-1)^2(x+1)$

e) es primo.

CURSO DE MATEMÁTICA BÁSICA:

ÁLGEBRA

UNIDAD 7: ECUACIONES E INECUACIONES POLINÓMICAS

"El hombre sabio eclipsará la fama si propone problemas algebraicos, y más aún, si los resuelve". Brahmagupta.

GUION DE CONFERENCIA No. 9

VALOR NUMERICO
ECUACIONES
FACTORES Y CEROS DE UN POLINOMIO
RESOLUCION DE ECUACIONES E INECUACIONES
Contenidos y Láminas No. 7.1 a 7.8

FICHAS DE ESTUDIO DE LOS POLINOMIOS

I OBJETIVOS

II ACTIVIDADES DE PREPARACIÓN

III ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

LABORATORIOS

CUESTIONARIO No. 9

RESPUESTAS

UNIDAD 7:	**GUION DE CONFERENCIA No. 9** **ECUACIONES E INECUACIONES POLINOMICAS**
TEMA: VALOR NUMERICO ECUACIONES FACTORES Y CEROS DE UN POLINOMIO RESOLUCION DE ECUACIONES E INE- CUACIONES	**CONTENIDO:** * Valor Numérico de un Polinomio * Ecuaciones Polinómicas y equivalentes * Ecuaciones de grado Cero. Primer grado * Ecuaciones de Segundo grado. * Factores de un polinomio y sus ceros. * Ecuaciones de grado mayor que dos. * Inecuaciones polinómicas.

DESARROLLO.	RECURSO
1. VALOR NUMERICO DE UN POLINOMIO. * Teorema del residuo. * Ecuaciones polinómicas. Generalidades. + Soluciones o raíces de una ecuación. + Ecuaciones equivalentes. + Propiedades de Uniformidad y principios de transposición	**Lámina 7.1**
2. ECUACIONES DE GRADO CERO Y DE PRIMER GRADO. * Grado de una Ecuación. Identidades y Contradicciones * Ecuaciones de Primer Grado. + Resolución y aplicaciones.	**Lámina 7.2**
3. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO. * Métodos de resolución. * Aplicaciones.	**Lámina 7.3 y 7.4**
4. FACTORES DE UN POLINOMIO Y SUS CEROS. * Teorema del Factor. * Factores polinómicos primos. + Máximo común divisor. + Mínimo común múltiplo. * Ecuaciones de grado mayor que dos.	**Lámina 7.5 y 7.6**
5. INECUACIONES POLINOMICAS. * Inecuaciones equivalentes. + Propiedades de monotonía y principios de transposición. * Resolución de Inecuaciones de Primer Grado.	**Lámina 7.7**
6. RESOLUCION DE INECUACIONES DE GRADO MAYOR O IGUAL A DOS. * Aplicaciones.	**Lámina 7.8**

LÁMINA DE PRESENTACIÓN

CONFERENCIA No. 9

UNIDAD 7: ECUACIONES E INECUACIONES POLINÓMICAS

CONTENIDO:

* Valor Numérico de un Polinomio

* Ecuaciones Polinómicas y equivalentes

* Ecuaciones de grado Cero. Primer grado

* Ecuaciones de Segundo grado.

* Factores de un polinomio y sus ceros.

* Ecuaciones de grado mayor que dos.

* Inecuaciones polinómicas.

LÁMINA 7.1

1. VALOR NUMERICO: Si $p(x) = 3x^2 + 2x - 5$ es un polinomio en la indeterminada x, entonces cuando se sustituye la x por -3 y se efectúan las operaciones indicadas en p(x) se tiene

$p(-3) = 3(-3)^2 + 2(-3) - 5 = 27 - 6 - 5 = 16$ y se dice que 16 es el **valor numérico de p(x)** cuando x = - 3	$p(0.4) = 3(0.4)^2 + 2(0.4) - 5 = -3.72$ valor numérico de p(x) en x =0.4

2. TEOREMA DEL RESIDUO: El valor numérico de p(x) para x = c es p(c), tal que p(c) es igual al residuo de dividir p(x) entre x -c.

Porque p(x) = q(x) (x - c) + r, por el algoritmo de la división, y
p(c) = q(c) (c - c) + r, de donde **p(c) = r**.

Si $p(x) = 3x^2 + 2x - 5$ entonces el valor numérico para:

x = -3 es p(-3) = 16 igual al residuo de dividir p(x) entre x + 3.
 	
3   2   - 5 |
    -9   21 | -3
3   -7 || 16 = P(-3)
	x = 0.4 es p(0.4) = -3.72 igual al residuo de dividir p(x) entre x - 0.4.
	
	3 2 - 5 |
	    1.2 1.28 | 0.4
	3 3.2 || -3.72 = P(0.4)

El valor numérico de un polinomio p(x) en x = c, se puede obtener:

1. Sustituyendo la x por el valor c y efectuando las operaciones.
2. Hallando el residuo de dividir p(x) entre x - c.

3. ECUACION POLINOMICA. Una ecuación es el problema planteado al revés: dado el v.n. del polinomio buscar el valor de x o incógnita de la ecuación.

Si se sabe que $3x^2 + 2x - 5 = 16$, entonces un valor de la x es -3, pero también se cumple cuando x = 7/3.

Conclusión: La igualdad $\mathbf{3x^2 + 2x - 5 = 16}$ es una ecuación polinómica de Segundo Grado y sus soluciones o raíces son - 3 y 7/3.

4. PROPIEDAD DE UNIFORMIDAD O PRINCIPIO DE TRANSPOSICION:

La ecuación $\mathbf{3x^2 + 2x - 5 = 16}$ equivale a $\mathbf{3x^2 + 2x - 21 = 0}$ por la propiedad de uniformidad de la suma o bien por transposición de 16 al primer miembro con el signo contrario.

La ecuación $\mathbf{3x^2 + 2x - 21 = 0}$ equivale a $x^2 + 2/3\, x - 7 = 0$ por la propiedad de uniformidad de la multiplicación.

Conclusión: La ecuación polinómica hereda el grado del polinomio y se dice que está en **forma canónica o normal** si el polinomio está ordenado e igualado a cero, o sea **p(x) = 0.**

LÁMINA 7.2

1. ECUACIONES EQUIVALENTES: Dos ecuaciones son equivalentes si tienen el mismo conjunto de soluciones o conjunto solución.

Ejemplos: Las ecuaciones $2x + 5 = 11$ y $3x - 2 = 7$ son equivalentes, porque $x = 3$ es la raíz o solución de ambas ecuaciones.

En cambio, $x^2 + x = 0$ y $x + 1 = 0$ no son equivalentes. El conjunto solución de la primera es $S_1 = \{0, -1\}$ y para la segunda $S_2 = \{-1\}$.

Toda ecuación es equivalente a su forma canónica.

2. CONJUNTO SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN. Una ecuación de segundo grado tiene a lo más dos soluciones o raíces. Una ecuación de primer grado tiene a una raíz o solución.

En general, una ecuación de grado n tiene a lo más n-raíces reales.

El conjunto solución de $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ es el conjunto de los reales, S = R. Esta expresión se llama una identidad por cumplirse para todo número que sustituya a x. Al escribir su forma canónica resulta 0 = 0.

En cambio el conjunto solución de $x^2 + 1 = (x + 1)(x - 1)$ es el vacío, no existe ningún número que cumpla esa relación y al escribirla en forma canónica se tiene $x^2 + 1 = x^2 - 1$, o sea 2 = 0 que no puede ser y de ahí su nombre de **contradicción**.

Tanto en las identidades como en las contradicciones al escribirlas en forma canónica desaparece la incógnita, por lo que se consideran ecuaciones de grado cero.

3. ECUACIONES DE PRIMER GRADO. Su forma canónica es $ax + b = 0$ y su solución $-b/a$ se obtiene aplicando la propiedad uniforme o el principio de transposición:

Propiedad Uniforme:	Propiedad de transposición
$ax + b + (-b) = 0 + (-b)$	
$ax = -b$	$ax + b = 0$
$(1/a)\, ax = (1/a)\,(-b)$	$ax = -b$
$x = -\,b/a$	$x = -b/a$

Ejemplo: Para resolver la ecuación	$x(x + 5) = (x + 3)(x - 2)$
se efectúan las operaciones	$x^2 + 5x = x^2 + x - 6$
se transponen los términos	$x^2 + 5x - x^2 - x = -6$
y se reducen los términos semejantes	$4x = -6$
de donde	$x = -3/2$

Aplicación: El total de la factura incluido el 7% de impuesto fue por L 314.50
¿ Cuál es el precio de costo del artículo?

Planteamiento:	Resolución:	Comprobación:
Sea x el precio de costo, entonces	$x + 0.07x = 314.50$	Costo L 293.93
$x + 0.07x = 314.50$	$1.07x = 314.50$	7% Impto. L 20.57
	$x = 293.93$	Total L 314.50

LÁMINA 7.3

1. ECUACION DE SEGUNDO GRADO.

Su forma canónica es $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, donde $a \neq 0$

La ecuación puede ser:

i) Completa, si b, c no son ceros: $3x^2 - 8x + 7 = 0$

ii) Incompleta si b = 0 ó c = 0: $2x^2 - 5 = 0$, $3x^2 - 2x = 0$

2. METODOS DE RESOLUCION DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

Una ecuación de segundo grado tiene a lo mas dos soluciones o raíces, o bien una sola solución de multiplicidad dos o ninguna solución real.

Para resolver una ecuación de segundo grado se emplean varios métodos:

* **Por factorización**, en el caso de que sea posible:

$ax^2 + bx + c = 0$, entonces $a(x - r_1)(x - r_2) = 0$

aplicando la recíproca de la propiedad absorbente del cero, se tiene que

$x - r_1 = 0$ ó $x - r_2 = 0$, de donde $x = r_1$, $x = r_2$, o sea $S = \{r_1, r_2\}$

Ejemplo: Completa	Incompletas:	
$x^2 + 3x + 2 = 0$		
entonces $(x + 2)(x + 1) = 0$	$x^2 + 3x = 0$	$x^2 - 4 = 0$
$x + 2 = 0$, $x + 1 = 0$	$x(x + 3) = 0$	$(x + 2)(x - 2) = 0$
$x = -2$ ó $x = -1$	$x = 0$, $x = -3$	$x = -2$, $x = 2$

Cuando b = 0, $ax^2 + c = 0$, para poder factorizar, c debe ser negativa.

* **Por completación de cuadrados**.

Resolver por completación de cuadrados: $x^2 + 3x - 10 = 0$

Transponiendo se tiene: $x^2 + 3x = 10$

Convirtiendo el 1er. miembro en cuadrado: $x^2 + 3x + 9/4 = 10 + 9/4$

Reduciendo $(x + 3/2)^2 = 49/4$

Extrayendo raíz cuadrada $x + 3/2 = \pm\ 7/2$

Resolviendo las ecuaciones $x = -\ 3/2 \pm\ 7/2$

Entonces, $S = \{2, -5\}$

LÁMINA 7.4

*** Por la fórmula de la cuadrática.**

La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, se resuelve con la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

que se obtiene completando el cuadrado así:

Transponiendo y dividiendo por a: $x^2 + b/a\, x = - c/a$
Completando el cuadrado $x^2 + b/a\, x + b^2/4a^2 = - c/a + b^2/4a^2$
Operando $(x + b/2a)^2 = (b^2 - 4ac)/4a^2$
Extrayendo raíz $x + b/2a = \pm (b^2 - 4ac)^{1/2}/2a$
De donde $x = [-b \pm (b^2 - 4ac)^{1/2}]/2a$

Ejemplo: Resuelva con la cuadrática la ecuación $3x^2 - 10x - 8 = 0$, donde $a = 3$, $b = - 10$ y $c = - 8$, entonces $x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(3)(-8)}}{2(3)} = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 96}}{6} = \frac{10 \pm 14}{6}$

de donde $x_1 = \frac{10 + 14}{6} = 4$, $x_2 = \frac{10 - 14}{6} = -\frac{2}{3}$

Luego el conjunto solución, S = {4, -2/3}.

En la fórmula de la cuadrática al radicando se le llama **discriminante** y se representa por $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta > 0$, entonces hay dos soluciones reales diferentes.
Si $\Delta = 0$, entonces hay una solución real de multiplicidad dos.
Si $\Delta < 0$, entonces no hay soluciones reales.

3. APLICACIONES: El grifo A tarda en llenar una pila 2 horas más que el grifo B. Los dos grifos juntos llenan la pila en 2 horas y 24 minutos. ¿En cuánto tiempo la llena cada grifo por separado?

Planteamiento	**Resolución**	**Comprobación**
Sea x horas que tarda B (x + 2) horas tarda A. En 1 hora, B hace 1/x de pila A hace 1/(x + 2) de pila. En una hora, juntos hacen 1/x + 1/(x + 2) Entonces, $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2}\right)\left(2 + \frac{24}{60}\right) = 1$	$\frac{x+2+x}{x(x+2)} = \frac{1}{2.4}$ Entonces $2.4(2x + 2) = x(x + 2)$ Se reduce a $5x^2 - 14x - 24 = 0$ que tiene las raíces $x = 4$, $x = -6/5$ La solución es x = 4 h.	B la llena en 4 hrs. A la llena en 6 hrs. Juntos en 1 hora hacen 1/4 + 1/6 = 5/12 de pila. La pila la llenan en 12/5 de hora o sea en 2.4 h igual a 2:24 h.

LAMINA 7.5

1. FACTORES DE UN POLINOMIO.

Dado un polinomio p(x), en algunos casos, es posible escribirlo como producto de factores de primer grado (factores lineales).

El polinomio	$p(x) = 2x^3 + x^2 - 7x - 6$
se escribe como	$p(x) = (2x + 3)(x - 2)(x + 1)$
entonces	$2x + 3,\ x - 2,\ x + 1$ son sus factores de 1er. grado.
además	$x = -3/2,\ x = 2,\ x = -1$ son los ceros de p(x)
porque	$p(-3/2) = 0,\ p(2) = 0,\ p(-1) = 0$

NOTA: Teorema del Residuo: "El valor p(c) es el residuo de dividir p(x) entre (x - c)."

TEOREMA DEL FACTOR: "x - c es un factor de p(x) si al dividir p(x) por x - c su residuo es cero, o sea si p(c) = 0".
Si $p(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n)$, entonces
$(x - c_1), (x - c_2),\ldots, (x - c_n)$ son factores de p(x), y $c_1, c_2, c_3,\ldots, c_n$ son sus ceros.

Un polinomio de grado no cero es primo si no se puede expresar como el producto de dos polinomios de grado mayor que cero. Los polinomios de primer grado son primos.

2. DESCOMPOSICION DE UN POLINOMIO EN FACTORES PRIMOS.

Para descomponer en factores los polinomios no primos de grado dos se puede recurrir al tanteo o la cuadrática. Así: $4x^2 + 5x - 6 = (4x - 3)(x + 2) = 4(x - 3/4)(x + 2)$.
Los polinomios de segundo grado con discriminante negativo son primos.

Para descomponer en factores los polinomios no primos de grado mayor que dos se buscan los ceros aplicando los teoremas del residuo y del factor y además el teorema de los posibles ceros racionales r/s, donde r es un factor del término independiente y s del coeficiente principal.

Si $p(x) = 2x^3 + x^2 - 7x - 6$ sus posibles ceros son los cocientes r/s, donde r = $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$, y s = $\pm 1, \pm 2$, entonces se forman $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm ⅓, \pm 3/2$.

$$\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & -7 & -6 & \\ & -3 & 3 & 6 & -3/2 \\ \hline 2 & -2 & -4 & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & -7 & -6 & \\ & -2 & 1 & 6 & -1 \\ \hline 2 & -1 & -6 & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & -7 & -6 & \\ & 4 & 10 & 6 & 2 \\ \hline 2 & 5 & 3 & 0 & \end{array}$$

$$p(x) = (x + 3/2)(2x^2 - 2x - 4) = (x + 3/2)(2)(x^2 - x - 2)$$
$$= (2x + 3)(x - 2)(x - 1)$$

Nota: Si el polinomio es de grado tres, al encontrar un cero se tiene el factor o divisor de p(x) y un cociente de grado dos, al que se aplica lo pertinente a los polinomios de segundo grado.

LÁMINA 7.6

1. MAXIMO COMUN DIVISOR Y MINIMO COMUN MULTIPLO PARA POLINOMIOS: su definición es semejante a la dada para los números naturales.

Nota: El m.c.d y el m.c.m deben ser polinomios mónicos.

Ejemplo: Si $p(x) = x^3 + 4x^2 + 4x = \mathbf{x(x + 2)^2}$ y $q(x) = \mathbf{x^2 - 4} = (x + 2)(x - 2)$
entonces $m.c.d[p(x), q(x)] = \mathbf{(x + 2)}$ y $m.c.m[p(x),q(x)] = \mathbf{x(x + 2)^2(x - 2)}$

2. ECUACION DE GRADO MAYOR DE 2. La expresión $p(x) = 0$ se dice que es una ecuación polinómica de grado igual al del polinomio, la indeterminada x del polinomio se llama la incógnita de la ecuación y sus valores son las raíces o soluciones de la ecuación, lo que equivale a los ceros del polinomio.

Si $p(x)$ es un polinomio, entonces $p(x) = 0$ es una ecuación polinómica.
Si $x = r$ hace que $p(r) = 0$, entonces r es un cero del polinomio o bien r es una raíz o solución de la ecuación polinómica.

Para resolver una ecuación de grado mayor que dos se tantean las fracciones r/s, y si se obtiene algún valor c_1 que la verifique, entonces la ecuación se escribe como: $(x - c_1)\, q_1(x) = 0$ se busca otro cero c_2 para $q_1(x)$ y se tiene: $(x - c_1)(x - c_2)\, q_2(x) = 0$ hasta que $q_2(x)$ sea cuadrático y se le pueda aplicar la respectiva fórmula.	Ejemplo: Resolver $x^4 + 2x^3 = 4x^2 + 2x - 3$ La ecuación en forma canónica es $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 3 = 0$ y las posibles raíces son ± 1, ± 3 y obteniendo: $(x + 1)(x^3 + x^2 - 5x + 3) = 0$, entonces $(x + 1)(x + 3)(x^2 - 2x + 1) = 0$ De donde: $(x + 1)(x + 3)(x - 1)^2 = 0.$ Entonces las raíces son $x = -1, -3$ y 1 de multiplicidad 2. $S = \{-1, -3, 1\}$

En algunos casos no es posible hallar soluciones racionales.
Por ejemplo: Resolver la ecuación $2x^3 + 2x - 5 = 0$

Al probar las posibles soluciones $x = \pm 1, \pm 5, \pm 1/2, \pm 3/2$ con la regla de Ruffini el residuo no es cero para ningún caso. Entonces esta ecuación no tiene soluciones racionales. Hay un teorema que no trataremos, que asegura que si el grado de la ecuación es impar tiene al menos una solución real.

Para evitarnos algunos cálculos, nos auxiliamos de la "regla de las cotas" que nos indica no probar con los siguientes números positivos si son positivos todos los términos del tercer renglón de la regla de Ruffini, y con los números negativos anteriores si se alternan los signos de los términos del tercer renglón en la división sintética.

Así para la ecuación anterior:

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & -5 & \\ & 5 & \frac{25}{2} & \frac{145}{4} & \frac{5}{2} \\ \hline 2 & 5 & \frac{29}{2} & \frac{125}{4} & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & -5 & \\ & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} \\ \hline 2 & -1 & \frac{5}{2} & -\frac{25}{4} & \end{array}$$

No es necesario probar 5.

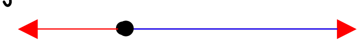
No es necesario probar -5/2, -5.

LÁMINA 7.7

1. INECUACIONES POLINOMICAS: Una inecuación polinómica en forma canónica se representa por $p(x) > 0$ o bien $p(x) < 0$. Ejemplo de inecuación es $x^3 + 2x^2 \geq 0$

2. Resolver una inecuación es hallar un subconjunto de los reales representado por un intervalo.

Al resolver el ejemplo $x^2(x + 2) \geq 0$ se obtiene el conjunto solución

$S = [-2, \infty[$ 

-2

Si se toma – $5 \notin S$ no verifica la desigualdad porque $(-5)^2 (- 5 + 2) = - 75 < 0$

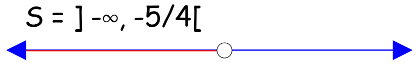
3. INECUACIONES EQUIVALENTES son las que tienen el mismo conjunto solución.
   Ejemplo: Son equivalentes las inecuaciones $x^3 + 2x^2 \geq 0$ y $x^2(x + 2) \geq 0$
   Ambas tienen el mismo conjunto solución $S = [-2, \infty[$

4. INECUACIONES DE PRIMER GRADO: Para resolver estas inecuaciones se tendrán que aplicar las propiedades de monotonía o bien los principios de transposición.

Ejemplo: Para resolver $x(x + 3) > x^2 + 7x + 5$ debe efectuar las operaciones antes de hacer las transposiciones o aplicar las propiedades de monotonía:

$$x^2 + 3x > x^2 + 7x + 5$$
$$3x - 7x > 5$$
$$- 4x > 5$$
$$x < -5/4$$

$S =]-\infty, -5/4[$



-5/4

Comprobación: Se toma algún valor del conjunto solución S para verificar la respuesta, por ejemplo x = -2 y se sustituye en la inecuación dada.

$(-2)(-2 + 3) > (-2)^2 + 7(-2) + 5$ y se cumple porque $-2 > -5$

En cambio si se sustituye x = 2, no se cumple la desigualdad porque

$2 (2 + 3) \ngtr 2^2 + 7(2) + 5$

resultando $10 < 23$

LÁMINA 7.8

1. INECUACIONES DE GRADO DOS O MAYOR QUE DOS.

Las incuaciones $p(x) \geq 0$ o bien $p(x) \leq 0$, son de grado dos o mayor que dos si ese es el grado del polinomio correspondiente.

2. PARA RESOLVER INECUACIONES DE GRADO DOS O MAYOR QUE DOS se siguen los siguientes pasos:

i) La inecuación se escribe en forma canónica.
ii) Se expresa como producto de factores primos.
iii) Luego, se analiza la variación del signo de cada factor y de su producto.
iv) La solución será el conjunto de valores donde el producto sea positivo (>, ≥ 0) o donde sea negativo (< 0)

3. EJEMPLOS:

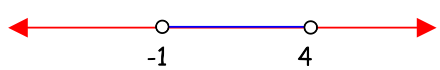
1. Resolver $x^2 - 1 < 3(x + 1)$.

La inecuación equivalente en su forma canónica es $x^2 - 3x - 4 < 0$
y factorizada: $(x - 4)(x + 1) < 0$

Tabla de variación de signos

		-1		4	
$x - 4$	-		-	o	+
$x + 1$	-	o	+		+
$P(x)$	+	o	-	o	+

$S =]-1, 4[$



Comprobación
Si $x = 0 \in S$, entonces
$0 - 1 < 3(0 + 1)$
$-1 < 3$, la verifica.

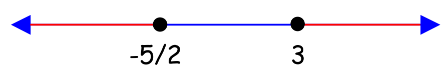
En cambio, para $x = 5 \notin S$ se tiene
$5^2 - 1 \nless 3(5 + 1)$
porque $24 > 18$

2. Resolver $(3 - x)(x^2 + 1)(2x + 5) \leq 0$

Tabla de variación de signos

		-5/2		3	
$3 - x$	+		+	o	-
$x^2 + 1$	+		+		+
$2x + 5$	-	o	+		+
$P(x)$	-	●	+	●	-

$S =]-\infty, -5/2] \cup [3, \infty[= \Re -]-5/2, 3[$



Comprobación
Se verifica para $x = -7 \in S$, porque
$(3 + 7)(7^2 + 1)(2\times(-7) + 5) \leq 0$
$10\times 50\times(-9) \leq 0$

No se verifica para $x = 1 \notin S$, porque
$(3 - 1)(1 + 1)(2 + 5) \nless 0$
$2\times 2\times 7 > 0$

FICHA DE ESTUDIO No. 7
UNIDAD7: ECUACIONES E INECUACIONES

Lámina 7.1	Valor numérico y Ecuaciones Polinómicas

NOMBRE______________________________________FECHA_____________________

I OBJETIVOS:

Al concluir esta guía podrás:

1. Encontrar el valor numérico de un polinomio.
2. Aplicar el teorema del residuo para calcular el valor numérico de un polinomio.
3. Interpretar una solución de una ecuación como un número que transforma la ecuación en una identidad numérica.
4. Determinar las propiedades de las ecuaciones polinómicas.

II ACTIVIDADES DE PREPARACION.

1. Estudia en un Texto lo siguiente:

* El valor numérico de un polinomio.
* Conceptos de variable y de dominio de la variable
* Teorema del residuo y su aplicación para calcular el valor numérico de un polinomio.
* Ecuación polinómica y su aplicación en la resolución de problemas.
* Propiedades de uniformidad y principios de transposición.
* La forma canónica de una ecuación.

2. Desarrolla los ejercicios en tu cuaderno.

III ACTIVIDADES DE EVALUACION.

1. Dado el polinomio $P(x) = 3x - x^2 + 2x^3$, obtenga $P(-2)$:

a) Por sustitución directa b) Por el teorema del residuo.

2. Si $p(x) = 2x^2 - 5x + 3$, y $c = 1 - 2\sqrt{3}$, entonces calcula $p(c)$:

$p(c) =$

3. Halla el valor de k si $p(x) = x^3 - 5x^2 + kx - 3$, y $p(3) = 5$.

4. Indica la propiedad aplicada en cada caso:

a) $x = -4$ equivale a $x - 7 = -11$

b) $x = -3$ equivale a $-5x = 15$

c) $x = 8$ equivale a $\frac{1}{2}x = 4$

5. ¿Existe alguna restricción para las propiedad de uniformidad?

6. A partir de las propiedades de uniformidad, deduce los principios de transposición.

7. Escribe dos ecuaciones equivalentes a $3x^2 = 12$.

8. Escribe en forma canónica e indica el grado de las ecuaciones:

a) $5x^3 - 3x = 6x^2 + 3x^3 - 6$

b) $4x - 3 + x^4 = 4x^2 - 7$

Láminas 7.2, 7.3 y 7.4	Ecuaciones de Grados Cero, Uno y Dos

NOMBRE____________________________________**FECHA**____________________

I OBJETIVOS:

Al concluir esta guía podrás:

1. Resolver cualquier ecuación de grado cero interpretándola como una identidad o como una contradicción.
2. Resolver cualquier ecuación de primer grado.
3. Resolver cualquier ecuación de segundo grado.

II ACTIVIDADES DE PREPARACION.

1. Estudia en un Texto lo siguiente:

* La ecuación de grado Cero: la identidad y la contradicción.
* La ecuación de primer grado y su método de solución.
* Aplicaciones de ecuaciones de primer grado a la resolución de problemas.
* La ecuación de segundo grado y sus características.
* Métodos de solución de la ecuación de Segundo Grado:
  a) Factorización, b) Completación de cuadrado, c) Fórmula de la cuadrática.
* Propiedades de uniformidad y principios de transposición.

2. Desarrolla los ejercicios en tu cuaderno.

III ACTIVIDADES DE EVALUACION.

1. ¿Por qué en la ecuación de primer grado, en forma canónica, $ax + b = 0$, **a** debe ser diferente de cero?

2. Verifica, utilizando los principios de transposición, que toda ecuación $ax + b = 0$, tiene como solución $x = -b/a$.

3. Dada la ecuación $3x + 5 = 0$, encuentra cuatro ecuaciones equivalentes a ella.

4. Verifica que las ecuaciones siguientes son identidades:

a) $(3x + 1)^2 - 9x^2 = 6x + 1$

b) $(4x - 5)(3x + 2) + 7x = 12x^2 - 10$

5. Dadas las fórmulas siguientes, despeja la variable indicada:

a) $c = 2\pi r$, para r. (Longitud de la circunferencia).
b) $p = 2a + 2b$, para a. (Perímetro del rectángulo).
c) $a_n = a_1 + (n - 1)d$, para n. (Progresión aritmética).

6. Encuentra los valores de a y b, tales que 5/3 es una solución de la ecuación $ax + b = 0$.

7. ¿Por qué en la ecuación $ax^2 + bx = 0$, una de las soluciones siempre es cero?

8. ¿Cuándo la ecuación $ax^2 + c = 0$, tiene soluciones reales?

9. Completa el cuadrado en el primer miembro de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 3x = 3$ b) $2x^2 - 5x = 9$

10. Dada la ecuación $4x^2 - 4xy + 1 - y^2 = 0$, aplica la fórmula de la cuadrática para encontrar:
a) x en términos de y b) y en términos de x

11. Verifica que si r_1 y r_2 son las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, entonces:

a) $r_1 r_2 = \frac{c}{a}$ b) $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$

Láminas 7.5, 7.6	**Factores de un Polinomio y Ceros de una Ecuación**

NOMBRE____________________________________**FECHA**____________________

I OBJETIVOS:

Al concluir esta guía podrás:

1. Relacionar los ceros de un polinomio con sus factores de primer grado.
2. Extender el Teorema Fundamental de la Aritmética a los polinomios.
3. Resolver ecuaciones de grado mayor que dos.

II ACTIVIDADES DE PREPARACION.

1. Estudia en un Texto lo siguiente:

* Los ceros de un polinomio.
* Teorema del factor. Factores de un polinomio. Ceros de un polinomio.
* Polinomio primo. Teorema Fundamental de la Aritmética extendido a los polinomios y sus aplicaciones: m.c.d y m.c.m.
* Ecuaciones polinómicas de grado mayor que dos. Las raíces o soluciones de una ecuación.

2. Desarrolla los ejercicios en tu cuaderno.

III ACTIVIDADES DE EVALUACION.

1. Encuentra la relación entre el Teorema del Residuo y el Teorema del Factor.

2. ¿Por qué es importante conocer los ceros de un polinomio?

3. Prueba que el segundo polinomio es un factor del primero y encuentra el otro factor:

a) $x^5 + x^4 - 16x - 16; x - 2$ b) $x^5 + 32; x + 2$ c) $x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 12x - 10; x^2 - 2$

4. Encuentra el valor de k tal que el segundo polinomio sea un factor del primero:

a) $x^3 + x^2 - 10x + k; x - 4$ b) $x^4 + kx + 10; x + 2$

5. En los siguientes polinomios, verifica que c = 1 es un cero. Encuentra los otros ceros, si son reales:

a) $2x^3 - 7x^2 + 9x - 4$ b) $3x^3 + 4x^2 - 6x - 1$

6. Muestra que 1 es un cero de multiplicidad 3, del polinomio mónico $x^5 + 2x^4 - 6x^3 - 4x^2 + 13x - 6$. Encuentra los ceros restantes y la factorización completa.

7. ¿Por qué un polinomio de grado **n**, no puede tener mas de n ceros diferentes en $\Re$ **?**

8. Utiliza el Teorema del Binomio para construir un polinomio que tiene c = 2/3 como único cero de multiplicidad 5.

9. Utiliza el Teorema del Factor para probar que x - y es un factor de $x^n - y^n$ para cualquier entero positivo n.

10. ¿Por qué los polinomios de grado cero (números reales), no son polinomios primos?

11. Muestre que el polinomio $3x^4 + x^2 + 5$ no tiene factores de la forma x - c, donde c es un número real.

12. Halla un polinomio mónico de quinto grado tal que -2 sea un cero de multiplicidad 3 y 4 un cero de multiplicidad 2.

13. Halla un polinomio mónico P(x) de grado 3 tal que los tres ceros son 5, -2, -3.

14. Para las ecuaciones que se dan a continuación indica las posibles raíces racionales.

a) $x^3 - 3x^2 + 2x + 2 = 0$
b) $9x^4 + 15x^3 - 20x^2 - 20x + 16 = 0$
c) $3x^5 - 10x^4 - 6x^3 + 24x^2 + 11x - 6 = 0$

15. En las ecuaciones del ejercicio anterior prueba las posibles raíces racionales y resuelva la ecuación con soluciones en el conjunto **Q** de los racionales.

16. Muestra que x = 2 es una solución de multiplicidad 3 de la ecuación
$2x^5 - 17x^4 + 51x^3 - 58x^2 + 4x + 24 = 0.$ Resuelve la ecuación.

17. Prueba que las ecuaciones siguientes no tienen soluciones racionales:
a) $x^3 + 3x^2 - 4x + 6 = 0$ b) $2x^5 + 3x^3 + 7 = 0$

18. Un triángulo rectángulo tiene un área de 30 cm^2 y su hipotenusa es 1 cm más larga que uno de los catetos.

a) Si x representa la longitud de ese cateto, muestra que $2x^3 + x^2 - 3600 = 0$

b) Prueba que la ecuación anterior sólo tiene una raíz positiva.

c) Encuentra las dimensiones del triángulo.

Láminas 7.7 y 7.8	**Inecuaciones Polinómicas y Aplicaciones**

NOMBRE______________________________________FECHA_____________________

I OBJETIVOS:

Al concluir esta guía podrás:

1. Interpretar una desigualdad y su solución como valores numéricos que se satisfacen en determinados intervalos reales.
2. Resolver inecuaciones polinómicas.

II ACTIVIDADES DE PREPARACION.

1. Estudia en un Texto lo siguiente:

* La inecuación y su solución.
* Propiedades de monotonía y principios de transposición.
* Resolución de inecuaciones de primer grado y aplicaciones.
* Resolución de inecuaciones de segundo grado y aplicaciones.
* Resolución de inecuaciones de grado mayor de dos y aplicaciones.

2. Desarrolla los ejercicios en tu cuaderno.

III ACTIVIDADES DE EVALUACION.

1. Representa gráficamente en la recta real, los intervalos siguientes:

a) $x > 2$ y $x \leq 3$

b) $x \leq -1$ y $x \geq -1$

c) $x > -1$ ó $x \leq -3$

d) $x < 2$ ó $x > 2$

2. Indica la propiedad utilizada en cada caso:

a) $a > b$ y $b > c$ entonces $a > c$

b) $a > b$ entonces $a - c > b - c$

c) $a > b$ y $c < 0$ entonces $ac < bc$

3. Resuelve la inecuación $ax + b > 0$, si $a \neq 0$.

4. Resuelve la inecuación $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x \geq -1$

5. Escribe tres inecuaciones equivalentes a la inecuación
$\frac{2}{3}x - 1 \leq \frac{1}{6}x + 2.$

6. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $(2x - 1)(x + 3) \leq 0$ b) $(1 - x)(x - 2) \geq 0$

7. ¿Por qué la inecuación $x^2 + 2x < -1$ no tiene solución en los reales?

8. ¿Para qué valores de x, $\sqrt{x^2 - 3x + 2}$ es un número real?

9. Da el conjunto solución de las siguientes inecuaciones y represéntalo en la recta real:

a) $(2x - 1)(2 - x)(3x - 2)(4x - 1) < 0$ b) $x^2(x + 2)(2 - 3x)(4x - 1) \leq 0$

10. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $x^2 \geq x$ b) $x^2 \leq 1$ c) $x^3 < 1$

LABORATORIO: CUESTIONARIO No. 9		**UNIDAD 7** Examen de Fichas sobre Láminas7.1 a 7.8
Ecuaciones e Inecuaciones	**Conferencia No. 9**	**CALIFICACION**

DESARROLLO	CORRECCION
I Escriba su respuesta en el espacio dado (4% c/u)	
1. El residuo de dividir $p(x) = x^{23} - 7x + 4$ entre $d(x) = x + 1$ es	
2. Si $x = a$ es una raíz de $p(x) = 0$, entonces $x - a$ es de $p(x)$.	
3. El conjunto solución de $x^2 + 1 > 0$ es	
4. El conjunto solución de $x^2 - x > x - 1$ es	
5. Si $x + 5$ es un factor de $x^3 + ax^2 + bx + c$ tal que $a, b, c \in Z$ entonces c debe ser múltiplo de -5.	
6. Si $x + 3$ es factor de $p(x)$ entonces $x =$ es un cero de $p(x)$.	
7. Si $p(x) = x^3 + 3x^2 - mx + 4$ tiene un cero en $x = -2$, entonces $m =$	
8. Si $p(x)$ tiene los ceros 3, -2, 3/2 y coeficiente principal 4, entonces $p(x) =$	
9. Si $p(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$, entonces por el teorema del residuo $p(-2) =$	
10. La ecuación $2x^3 - x^2 - 6 = 0$ tiene como posibles soluciones racionales a	

II. Resuelva los siguientes problemas (15%)

1. Resuelva la ecuación $x^2(3x + 5) = 4x + 4$

2. Halle k tal que las raíces de la ecuación

$x^2 + 2x + k + 3 = 0$, sean reales.

3. Con un cartón cuadrado se construye una caja cortando en cada esquina un cuadrado de 2 pulgadas de lado y doblando los lados. Si el volumen de la caja es de 128 pulgadas^3, halle la longitud del lado del cartón dado.

4. La base de un rectángulo es el doble de la altura disminuida en 3. Su perímetro es mayor o igual que 42. Encuentre las posibles dimensiones del rectángulo.

RESPUESTAS

UNIDAD 7: ECUACIONES E INECUACIONES.

Lámina 7.1

1. P (-2) = - 26 **2**. $24 + 2\sqrt{3}$ **3**. 3k – 21 = 5, entonces k = 26/3 **4**. Uniforme:
a) suma – 7 a ambos lados de la igualdad b) multiplica por – 5 c) divide por 2.
5. No se puede dividir por cero. **6**. Aplica la propiedad de uniformidad **7**. a) $x^2 = 4$
b) $x = \pm 2$ **8.** a) $2x^3 - 6x^2 - 3x + 6 = 0$, ecuación polinómica de grado 3
b) $x^4 - 4x^2 + 4x + 4 = 0$, ecuación polinómica de grado 4.

Láminas 7.2, 7.3 y 7.4

1. Porque no se puede dividir por cero. **2**. ax = - b, entonces x = - b/a **3**. a) 3x = -5
b) x = - 5/3 c) x + 2 = 1/3 d) 3x + 6 = 1. **4**. a) $(9x^2 + 6x + 1) – 9x^2 = 6x + 1$
b) $12x^2 - 7x – 10 + 7x = 12x^2 - 10$. **5.** a) $r = \dfrac{c}{2\pi}$ b) a = (p – 2b)/2
c) $n = \dfrac{(a_n - a_1)}{d} + 1$ **6**. 5a + 3b = 0. **7.** Porque x (ax + b) = 0, implica x = 0 ó ax + b = 0
8. Cuando $c \leq 0$. **9**. a) $x^2 + 3x + 9/4 = 3 + 9/4$ o sea $(x + 3/2)^2 = 21/4$
b) $2(x^2 - (5/2)x + 25/4) = 9 + 25/2$ o sea $2(x – 5/2)^2 = 43/2$
10. a) $x = \dfrac{4y \pm \sqrt{16y^2 - 16(1 - y^2)}}{8} = \dfrac{4y \pm \sqrt{32y^2 - 16}}{8} = \dfrac{4y \pm 4\sqrt{2y^2 - 1}}{8} = \dfrac{y \pm \sqrt{2y^2 - 1}}{2}$
b) $y = \dfrac{-4x \pm \sqrt{16x^2 + 4(1 + 4x^2)}}{2} = \dfrac{-4x \pm \sqrt{32x^2 + 4}}{2} = \dfrac{-4x \pm 2\sqrt{8x^2 + 1}}{2} = -2x \pm \sqrt{8x^2 + 1}$
11. $r_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $r_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, verifica a) y b).

Láminas 7.5 y 7.6

1. Cuando el residuo es cero, el divisor es factor del dividendo. **2**. Porque son las raíces o soluciones de la ecuación polinómica. **3**. a) $(x – 2)(x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 12x + 8)$
b) $(x + 2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$ c) $(x^2 - 2)(x^2 - 6x + 5)$ **4**. a) - 40 b) – 13.
5. a) $(x – 1)(2x^2 - 5x + 4)$, el segundo factor es una cuadrática sin ceros reales: $\Delta < 0$
b) $(x – 1)(3x^2 + 7x – 1)$, los ceros del segundo factor son, aproximadamente, - 2.18, - 0.15.
6. Los ceros son: 1 de multiplicidad 3, - 2, - 3, o sea $(x – 1)^3 (x + 2)(x + 3) = p(x) = 0$.
7. Porque su máximo número de factores lineales es n.
8. $(x – 2/3)^5 = x^5 - \frac{10}{3}x^4 + \frac{40}{9}x^3 + - \frac{80}{27}x^2 + \frac{80}{81}x - \frac{32}{243}$. **9**. Si $P(x, y) = x^n - y^n$, entonces P(x, x) = P(y, y) = 0, o sea que x – y es factor de P(x, y). **10**. Un polinomio de grado mayor que cero se dice primo si no se puede expresar como el producto de dos polinomios de grado también mayor que cero. Los números reales de grado cero no son polinomios primos. Son ejemplos de polinomios primos, los de primer grado y los de segundo grado con discriminante negativo.
11. El polinomio no se anula para todo valor de c, porque con sus exponentes positivos se obtienen cantidades positivas.
12. $P(x) = (x + 2)^3 (x – 4)^2 = x^5 - 2x^4 - 20x^3 + 32x^2 + 128x + 128$.
13. $P(x) = (x – 5)(x + 2)(x + 3) = x^3 - 19x – 30$. **14**. a) ± 1, ± 2 b) ± 1, ± 2, ± 4, ± 8, ± 16, $\pm \frac{1}{3}$, $\pm \frac{2}{3}$, $\pm \frac{4}{3}$, $\pm \frac{8}{3}$, $\pm \frac{16}{3}$, $\pm \frac{1}{9}$, $\pm \frac{2}{9}$, $\pm \frac{4}{9}$, $\pm \frac{8}{9}$, $\pm \frac{16}{9}$
c) ± 1, ± 2, ± 3, ± 6, $\pm \frac{1}{3}$, $\pm \frac{2}{3}$. **15**. a) no tiene soluciones racionales b) 1, - 2, 2/3, - 4/3

c) – 1 de multiplicidad 2, 2, 3, 1/3. **16**. $(x – 2)^3 (2x + 1) (x – 3) = 0$, las otras raíces son – ½ y 3.
17. a) no son soluciones: ± 1, ± 2, ± 3, ± 6 b) ni ± 1, ± 7, ± 1/2, ± 7/2.
18. a) $x\sqrt{2x+1}/2 = 30$ b) 12 (sólo hay un cambio de signo) c) los catetos: 12, 5 cm.

Láminas 7.7 y 7.8

1. a)]2, 3] b) {- 1} c)]- ∞, - 3] ∪]- 1, ∞[d) ℜ - {2} **2**. a) transitiva
b) monótona (suma) c) monótona (multiplicación por un número negativo).
3. a) x > - b/a, si a > 0 b) x < - b/a, si a < 0. **4**. x ≥ - 6 **5.** a) $\frac{2}{3}x$
b) $(\frac{2}{3} - \frac{1}{6})x \le 3$ c) $\frac{1}{2}x \le 3$.

6.

a)

		-3		1/2	
2x – 1	-		-	0	+
x + 3	-	0	+		+
	+	0	-	0	+

S = [- 3, ½]

b)

		1		2	
1 – x	+	0	-		-
x - 2	-		-	0	+
	-	0	+	0	-

S = [1, 2]

7. Porque equivale a $(x + 1)^2 < 0$, y un cuadrado siempre es positivo.
8. Cuando $x^2 - 3x + 2 \ge 0$, con solución S =]- ∞, 1] ∪ [2, ∞[
9. a) S =]- ∞, ¼[∪]1/2, 2/3[∪]2, ∞[b) S = [- 2, ¼] ∪ [2/3, ∞[
10. a) x(x – 1) ≥ 0, S = ℜ -]0, 1[b) (x + 1) (x – 1) ≤ 0, S = [- 1, 1]
c) $(x – 1)(x^2 - x + 1) < 0$, S =]- ∞, 1[

CUESTIONARIO:

I. 1. p(-1) = - 1 + 7 + 4 = 10 **2**. factor **3**. ℜ **4.** ℜ - {1} **5**. c **6**. – 3
7. – 4 **8.** 4(x – 3) (x + 2) (x – 3/2) **9**. – 3 **10.** ± 1, ± 2, ± 3, ± 6, ± 1/2, ± 3/2.
II. 1. 1, - 2/3, -2. **2.** El discriminante Δ ≥ 0: - 4k – 8 ≥ 0 es k ≤ - 2 **3**. 12
4. altura x ≥ 8, base 2x – 2 ≥ 13.

CURSO DE MATEMÁTICA BÁSICA:

ÁLGEBRA

UNIDAD 8: EXPRESIONES RACIONALES ALGEBRAICAS

"Reducir cualquier problema a un problema
matemático; éste a uno algebraico y éste,
a resolver una sola ecuación".
Descartes.

GUION DE CONFERENCIA No. 10

DEFINICIONES
ESTRUCTURA ALGEBRAICA
ECUACIONES E INECUACIONES
Contenidos y Láminas No. 8.1 a 8.4

FICHAS DE ESTUDIO DE LAS EXPRESIONES RACIONALES.

I OBJETIVOS

II ACTIVIDADES DE PREPARACIÓN

III ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

LABORATORIOS

CUESTIONARIO No. 10

RESPUESTAS

UNIDAD 8:	GUION DE CONFERENCIA No. 10 EXPRESIONES RACIONALES ALGEBRAICAS
TEMA: DEFINICIONES. ESTRUCTURA ALGEBRAICA. ECUACIONES E INECUACIONES.	**CONTENIDO:** * Generalidades de las expresiones racionales algebraicas. * Operaciones. * Ecuaciones con expresiones racionales. * Inecuaciones.

DESARROLLO.	RECURSO
1. GENERALIDADES DE EXPRESIONES RACIONALES ALGEBRAICAS. * Definición. * Expresiones racionales algebraicas equivalentes y reducibles. * Conversión de fracciones algebraicas a un común denominador.	**Lámina 8.1**
2. OPERACIONES CON EXPRESIONES RACIONALES ALGEBRAICAS: ESTRUCTURA ALGEBRAICA. * Suma de fracciones: + Fracciones con un mismo denominado y con distinto + Propiedades. * Multiplicación y propiedades. * División	**Lámina 8.2**
3. ECUACIONES RACIONALES ALGEBRAICAS * Valor numérico de una expresión racional algebraica * Dominio. * Ecuación Racional Algebraica: + Forma canónica + Método de resolución + Aplicaciones.	**Lámina 8.3**
4. INECUACIONES RACIONALES ALGEBRAICAS. * Forma canónica de una inecuación racional. * Tabla de Variación del signo. * Conjunto Solución y Comprobación.	**Lámina 8.4**

LÁMINA DE PRESENTACIÓN

CONFERENCIA No. 10

UNIDAD 8: **EXPRESIONES RACIONALES ALGEBRAICAS**

CONTENIDO:

* Generalidades de las expresiones racionales algebraicas.

* Operaciones.

* Ecuaciones con expresiones racionales.

* Inecuaciones.

LÁMINA 8.1

1. Expresión Racional Algebraica es el cociente de dos polinomios tal que

$\alpha(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, donde q(x) ≠ 0

Ejemplo: $\alpha(x) = \dfrac{x^2+3}{x^3-5}$ es una expresión racional algebraica y

$x^2 + 3$ y $x^3 - 5$ son los términos de la expresión racional.

Recuerde que si x ≠ 0, entonces las bases elevadas a exponentes negativos indican expresiones racionales algebraicas, como:

$$x^{-1} = \frac{1}{x}, \quad x^{-n} = \left(x^{-1}\right)^n = \frac{1}{x^n}, \quad x^{-n} = \left(x^n\right)^{-1} = \frac{1}{x^n}$$

Todo polinomio, considerado como $p(x) = \dfrac{p(x)}{1}$ es una expresión racional algebraica.

2. Se llama expresión racional algebraica reducida a la expresión cuyos términos son primos entre sí.

Ejemplo: Dada la expresión $\dfrac{x^2+7x+12}{x^2-9}$ se reduce cancelando factores iguales en ambos términos.

$\dfrac{x^2+7x+12}{x^2-9} = \dfrac{(x+3)(x+4)}{(x+3)(x-3)} = \dfrac{x+4}{x-3}$ es la reducida.

3. Varias fracciones algebraicas pueden reducirse a un común denominador.

Ejemplo: Las expresiones $\dfrac{x}{x-1}, \dfrac{x^2}{x^2-1}, \dfrac{x+1}{x-1}$

se reducirán al común denominador $x^2 - 1$, obteniéndose

$$\frac{x(x+1)}{x^2-1}, \ \frac{x^2}{x^2-1}, \ \frac{(x+1)^2}{x^2-1}$$

expresiones racionales equivalentes a las expresiones dadas.

LÁMINA 8.2

Operaciones con Expresiones Racionales Algebraicas:

1. Suma de Expresiones Racionales Algebraicas:

a) Con el mismo denominador, como por ejemplo

$$\frac{x^3}{x^3+1}+\frac{3x^2+1}{x^3+1}+\frac{3x}{x^3+1}=\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3+1}=\frac{(x+1)^3}{x^3+1)}$$

b) Con distinto denominador, se da el ejemplo:

$$\frac{1}{x+1}+\frac{x+2}{x^2-x+1}=\frac{x^2-x+1+x^2+3x+2}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{2x^2+2x+3}{x^3+1}$$

2. Propiedades de la suma: Cierre, conmutativa, asociativa, existencia de elemento neutro (la fracción de numerador cero pero denominador no cero), existencia de opuesto para toda fracción (cambiando el signo del numerador).

Resta de expresiones racionales algebraicas: sumándole al minuendo el opuesto del sustraendo.

$$\frac{1}{x-3}-\frac{x+2}{x-2}=\frac{x-2-x^2+x+6}{(x-3)(x-2)}=\frac{-x^2+2x+4}{(x-3)(x-2)}$$

3. Multiplicación. La regla es la misma dada para los números racionales: se multiplican los numeradores entre sí y los denominadores entre sí, y si es posible se simplifica el resultado.

$$\frac{3x+2}{x^2-4}\bullet\frac{x+2}{3x^2+5x+2}=\frac{3x+2}{(x+2)(x-2)}\bullet\frac{x+2}{(3x+2)(x+1)}=\frac{1}{(x-2)(x+1)}$$

Propiedades: Cierre, asociativa, conmutativa, elemento neutro (el número 1), e inverso multiplicativo para toda fracción no cero.

$$\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{-2}=\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2=\frac{x^2+4x+4}{x^2+2x+1}$$

LÁMINA 8.3

Ecuaciones Racionales.

1. Valor numérico de una expresión racional algebraica:

Si $\alpha(x) = \dfrac{3x-1}{x^2-9}$ entonces α(2) = 5/(-5) = -1, α(1) = - 1/4, α(3) = 8/0 no está definido.

Observe que para esta expresión los valores prohibidos para la x son 3 y -3 porque anulan al denominador y se sabe que no está definida la división por cero.

2. Dominio de la variable x en una expresión racional algebraica son los valores permitidos para la x, o sean los valores que no hacen cero al denominador.

Ejemplo: Si $\alpha(x) = \dfrac{5x-1}{x^2+3x-4}$ entonces los valores permitidos o dominio de la x es

D(x) = {x ε R | x $\neq$ 1, x $\neq$ - 4}

3. Ecuación Racional:

La forma canónica de la ecuación racional es $\dfrac{p(x)}{q(x)} = 0$, donde p(x) y q(x) son polinomios canónicos. Resolver $\dfrac{p(x)}{q(x)} = 0$ equivale a resolver p(x) = 0, siempre que los ceros de p(x) no anulen a q(x).	Ejemplo: Resolver $\dfrac{3x^2-12}{5x-1} = 0$ equivale a resolver $3x^2$ -12 = 0, o sea x = $\pm$ 2. Comprobación: Si x = 2, entonces $\dfrac{3\times4-12}{5\times2-1} = \dfrac{0}{9} = 0$ Igual resultado para x = - 2.

4. Problema de Aplicación: Un hombre y su hijo juntos pueden pintar su casa en 4 días. El padre solo puede hacer el trabajo en 6 días menos del tiempo en que lo puede hacer el hijo. ¿ Cuánto tiempo le toma a cada uno hacerlo solo?

Planteamiento	Solución	Comprobación
Sea x el tiempo del hijo, x - 6 el del padre En 1 día hacen 1/x y 1/(x-6) respectivamente. En un día, juntos pintan 1/x + 1/(x-6). Luego, 4[1/x + 1/(x-6)] = 1	$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-6} = \frac{1}{4}$ x^2 - 14x + 24 = 0 (x - 12)(x - 2) = 0 x = 12, x = 2. El hijo pinta la casa en 12 días y el padre en 6.	En 1 día, el hijo pinta 1/12 y el padre 1/6 de la casa. Juntos lo hacen en 4 días, o sea que $4 \bullet \left[\frac{1}{12} + \frac{1}{6}\right] = 1$

LÁMINA 8.4

1. Inecuación Irracional: es una desigualdad con expresiones racionales algebraicas. Su forma canónica está dada por $\frac{p(x)}{q(x)} \leq 0$ ó $\frac{p(x)}{q(x)} \geq 0$, donde p(x) y q(x) están en forma canónica.

2. Para resolver estas inecuaciones se aplican las tablas de variación de signos de los términos de la fracción.

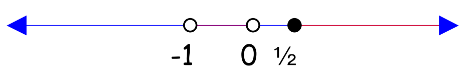
Ejemplo: Para resolver $\frac{1}{x} \leq \frac{3}{1+x}$ se debe escribir en su forma canónica:

$\frac{1}{x} - \frac{3}{1+x} \leq 0$ que equivale a $\frac{1-2x}{x(1+x)} \leq 0$

Tabla de variación de signos

		-1		0		½	
1 - 2x	+		+		+	o	-
x	-		-	o	+		+
1 + x	-	o	+		+		+
a(x)	+		-		+	●	-

S =] -1, 0 [∪ [½, ∞[



Comprobación

Si x = - ½ ε S, entonces

$$\frac{1 - 2(- 1/2)}{(- 1/2)\,(1+(-1/2))} = \frac{2}{- 1/4} \leq 0$$

es menor que cero, y la verifica.

En cambio, para x = - 5 ∉ S se tiene "mayor que cero"

$$\frac{1 - 2(- 5)}{(- 5)\,(1+(- 5))} = \frac{11}{20} > 0$$

FICHA DE ESTUDIO No.8
UNIDAD 8: EXPRESIONES RACIONALES ALGEBRAICA

Lámina 8.1	Generalidades de las Expresiones Algebraicas

NOMBRE_____________________________________FECHA____________________

I OBJETIVOS:

Al concluir esta guía podrás:

1. Definir una expresión racional algebraica.
2. Simplificar expresiones racionales algebraicas.
3. Reducir a un común denominador expresiones racionales algebraicas.

II ACTIVIDADES DE PREPARACION.

1. Estudia en un Texto lo siguiente:

* Expresión racional algebraica: sus términos.
* Expresiones racionales equivalentes.
* Expresión racional reducida.
* Conversión de fracciones algebraicas a un mismo denominador.

2. Desarrolla los ejercicios en tu cuaderno.

III ACTIVIDADES DE EVALUACION.

1. Indica cuales de las siguientes expresiones son racionales algebraicas (o fracciones algebraicas).

a) $(x^2 + 3)^{-2}$ b) $(x^2 + 3)^{-½}$

c) $(x^2 + 3)/2$ d) $(\sqrt{x} + 1)/3x$

2. Simplifica o reduce a su mínima expresión:

a) $\dfrac{x^3 - 0.008}{x^2 - 0.04}$

b) $\dfrac{9x^3 - x}{3x^2 + 8x - 3}$

c) $\dfrac{196x - 4x^3}{2x^3 - 6x + 14x^2 - 42}$

3. Expresa cada fracción como equivalente a otra de denominador dado:

a) $\dfrac{3}{x+2} = \dfrac{?}{x^2 - x - 6}$

b) $\dfrac{2}{2-x} = \dfrac{?}{x^2 - 4}$

c) $\dfrac{2x-1}{x-2} = \dfrac{?}{x^2 - 4x + 4}$

4. Reduce a un común denominador las expresiones racionales dadas:

a) $\dfrac{3}{x^3 + x^2 - 6x}, \dfrac{2}{x^3 + 3x^2}, \dfrac{5}{2-x}$

b) $\dfrac{3}{x^3 - x^2}, \dfrac{2x}{1 - x^2}, \dfrac{2}{x^3 - 2x^2 + x}, \dfrac{1}{x}$

Lámina 8.2	Operaciones con Expresiones Racionales Algebraicas

NOMBRE______________________________________**FECHA**_____________________

I OBJETIVOS:

Al concluir esta guía podrás:

1. Definir la suma y la multiplicación de expresiones racionales algebraicas.
2. Identificar las propiedades de las operaciones algebraicas.
3. Efectuar operaciones combinadas.

II ACTIVIDADES DE PREPARACION.

1. Estudia en un Texto lo siguiente:

* La suma y resta de expresiones racionales algebraicas: sus propiedades.
* La multiplicación y división de expresiones racionales algebraicas: sus propiedades.

2. Desarrolla los ejercicios en tu cuaderno.

ACTIVIDADES DE EVALUACION.

1. Efectúe las operaciones indicadas.

a) $\dfrac{x+5}{2x^2-2}+\dfrac{3}{1-x}+\dfrac{5}{2x+2}$

b) $\dfrac{2y-8y^{-1}}{8y^{-2}+2y^{-1}-1}$

c) $\left(\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x}{y}\right)\left(\dfrac{xy}{x^2-y^2}+\dfrac{x}{x+y}\right)^{-1}$

2. Escribe tres formas equivalentes para la fracción $\frac{1}{a-b}, a \neq b$ cambiando el signo o signos del numerador, denominador o de la fracción en sí.

3. Simplifica:

a) $$\frac{\frac{1+x}{x}+\frac{x}{1-x}}{\frac{1-x}{x}+\frac{x}{1+x}}$$

b) $$\frac{\frac{x}{x-1}-\frac{x+1}{x}}{1-\frac{x}{x-1}}$$

4. Reduce:

a) $$\frac{\frac{1}{2(x+h)}-\frac{1}{2x}}{h}$$

b) $$\frac{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}}{h}$$

Láminas 8.3 y 8.4	Ecuaciones e Inecuaciones Racionales Algebraicas

NOMBRE____________________________________FECHA____________________

I OBJETIVOS:

Al concluir esta guía podrás:

1. Determinar el valor numérico de una expresión racional algebraica y cuales valores están permitidos.
2. Resolver ecuaciones e inecuaciones con expresiones racionales algebraicas.
3. Aplicar las ecuaciones e inecuaciones a la resolución de problemas prácticos.

II ACTIVIDADES DE PREPARACION.

1. Estudia en un Texto lo siguiente:

* El valor numérico de una expresión racional algebraica y su dominio.
* Forma canónica de una ecuación racional algebraica y su solución.
* Forma canónica de una inecuación racional algebraica y su solución.

2. Desarrolla los ejercicios en tu cuaderno.

III ACTIVIDADES DE EVALUACION.

1. Si $\alpha(x) = \dfrac{x+3}{x^2-4x-5}$ entonces halla su valor numérico para x = -2, -1, 0, ½, 3. Además, da el otro valor no permitido para x.

2. Indica los valores prohibidos para la variable x en:

a) $\dfrac{3x - 1}{x + 3}$ b) $\dfrac{2 - x}{1 - 2x}$ c) $\dfrac{5}{x^2 + 3x - 10}$

3. ¿Está la fracción $(x - 2)/(1 + x^2)$ definida para todos los valores $x \in \mathbb{R}$? ¿Para qué valores de x la fracción se anula? ¿es positiva? ¿es negativa?

4. Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba la respuesta:

a) $\dfrac{8}{x+2} + \dfrac{8}{x-2} = 3$ b) $\dfrac{9x^2}{(x+2)^2} + \dfrac{9x}{x+2} + 2 = 0$

5. Resuelve y representa en la recta numérica, la solución de las inecuaciones siguientes:

a) $\dfrac{x}{x+2} < 4$ b) $\dfrac{2}{x-2} \geq \dfrac{4}{x}$

6. Muestre que la suma de cualquier número estrictamente positivo y su recíproco es mayor o igual a 2.

7. Un hombre y su hijo trabajando juntos pueden pintar su casa en cuatro días. El hombre puede hacerlo solo en 6 días menos que en lo que puede hacerlo el hijo. ¿En cuánto tiempo pinta la casa cada uno por separado?

8. Dos números están en la razón de 6:11. Si el primer número es disminuido en 4 y el segundo aumentado en 6, los dos números resultantes están 4:9. Halle los números.

9. Un carpintero puede hacer un mueble en 6 horas, pero su ayudante necesita 16 horas para hacer el mismo trabajo. Cuando ellos lo hacen juntos, el ayudante trabaja 5 horas más que el carpintero ¿cuánto tiempo le toma a cada uno cuando trabajan juntos?

LABORATORIO: CUESTIONARIO No. 10		UNIDAD 8 Examen de Fichas sobre Láminas8.1 a 8.4
Expresiones Racionales	**Conferencia No. 10**	**CALIFICACION**

DESARROLLO	CORRECCION
I Escriba su respuesta en el espacio dado (5% c/u) 1. La fracción $(x - y)^{-1}$ es negativa si 2. Si se asigna el signo negativo al numerador de la fracción $-\frac{4-3x}{2x}$, entonces equivale a 3. La condición para que $p(x) /(x^2 - 6x + 8)$ esté definida es 4. La expresión simplificada de $\frac{x^2(2x-3)}{x(6-4x)}$ es 5. Una persona realiza un trabajo en x horas, la parte de trabajo que hace en 3 horas es **II.** Resuelva los problemas siguientes (15%): 1. Opere: $\frac{x}{x-1}+\frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{1-x}{x^2-x}$	

2. Escriba como una fracción simple:

$$\frac{1}{x+\frac{1}{x+\frac{1}{x}}} =$$

3. La tercera parte de un número es 7 unidades menos que el mismo. Halle el número.

4. Halle el conjunto solución de:

$$\frac{6}{x-1} - \frac{5}{x-2} > 2$$

5. Si A, B y C hacen un trabajo solos en 4, 3 y 6 horas respectivamente. ¿En cuánto tiempo lo hacen trabajando los tres juntos?

RESPUESTAS

UNIDAD 8: EXPRESIONES RACIONALES ALGEBRAICAS.

Lámina 8.1

1. a) y c) **2**.a) $\dfrac{x^2+0.2x+0.04}{x+0.02}$ b) $\dfrac{x(3x+1)}{x+3}$ c) $\dfrac{2x(7-x)}{x^2-3}$

3.a) $\dfrac{3x-9}{x^2-x-6}$ b) $\dfrac{2x+4}{4-x^2}$ c) $\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-4x+4}$ **4**. a) Denominador común:

D = $x^2(x+3)(x-2)$ y los respectivos numeradores son: 3x, 2(x -2), - $5x^2(x+3)$.

b) D = $x^2(x-1)^2(x+1)$ y los numeradores son: $3(x^2-1)$, $2x^3(1-x)$, 2x(x + 1), $x(x-1)^2(x+1)$.

Lámina 8.2

1. a) $\dfrac{3}{1-x^2}$ b) $\dfrac{4-y}{2y(y-2)}$ c) $\dfrac{(x^2+y^2)(x+y)}{x^2y}$ **2.** $\dfrac{-1}{b-a}=-\dfrac{1}{b-a}=-\dfrac{-1}{a-b}$

3. a) $\dfrac{1+x}{1-x}$ b) $-\dfrac{1}{x}$ **4**. a) $-\dfrac{1}{2x(x+h)}$ b) $-\dfrac{2x+h}{x^2(x+h)^2}$.

Láminas 8.3 y 8.4

1. $\alpha(-2)=1/7$, $\alpha(-1)$ no existe, $\alpha(0)=-3/5$, $\alpha(1/2)=-14/27$, $\alpha(3)=-¾$. Los valores prohibidos son – 1 y 5. **2**. a) – 3 b) ½ c) -5, 2. **3**. Está definida para todo valor real de x. Se anula cuando x = 2. Es positiva si x $\geq$ 2, y negativa si x < 2 (el signo depende sólo del numerador.
4. a) – 2/3, 6 b) – 4/5, - ½ **5.** a) S =] $-\infty$, - 8/3[$\cup$]- 2, ∞[
b) S =] - ∞,0[$\cup$]2, 4], son valores prohibidos 0, 2. **6**. Resuelve $x+\frac{1}{x}\geq 2$ con S =]0, ∞[

7. La ecuación $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-6}=\dfrac{1}{4}$, de donde las respuestas son 12 y 6 días. **8**. 36, 66.

9. La ecuación $\dfrac{x}{6}+\dfrac{x+5}{16}=1$, entonces las respuestas son 3 y 8 horas.

CUESTIONARIO.

I. 1**.** x < y 2. $\dfrac{3x-4}{2x}$ 3. x ≠ 2, x ≠ 4. 4. $-\dfrac{x}{2}$ 5. $\dfrac{3}{x}$

II. 1. $\dfrac{x^4+3x^3+x^2-x-1}{x(x^3-1)}$ 2. $\dfrac{x^2+1}{x^3+2x}$ 3. x = 21/2 4. S =]1, 2[5. 4/3 h.

CURSO DE MATEMÁTICA BÁSICA:

ÁLGEBRA

UNIDAD 9: EXPRESIONES IRRACIONALES ALGEBRAICAS

"La matemática es la reina de las ciencias".
Gauss.

GUION DE CONFERENCIA No. 11

EXPRESIONES IRRACIONALES ALGEBRAICAS.
EXPRESIONES CON VALOR ABSOLUTO.
Contenidos y Láminas No. 9.1 a 9.4

FICHAS DE ESTUDIO DE LAS EXPRESIONES RACIONALES.

I OBJETIVOS

II ACTIVIDADES DE PREPARACIÓN

III ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

LABORATORIOS

CUESTIONARIO No. 11

RESPUESTAS

<table>
<tr><td>UNIDAD 9:</td><td>GUION DE CONFERENCIA No. 11

EXPRESIONES IRRACIONALES ALGEBRAICAS Y EXPRESIONES CON VALOR ABSOLUTO</td></tr>
<tr><td>TEMA:

EXPRESIONES IRRACIONALES ALGEBRAICAS.

EXPRESIONES CON VALOR ABSOLUTO.</td><td>CONTENIDO:

* Generalidades de las expresiones irracionales algebraicas
* Operaciones.
* Ecuaciones e Inecuaciones con expresiones irracionales algebraicas.

* Expresiones algebraicas con Valor Absoluto.</td></tr>
</table>

DESARROLLO.	RECURSO
1. GENERALIDADES DE EXPRESIONES IRRACIONALES ALGEBRAICAS. * Definición e interpretación del Índice de la raíz. * Igualdad y semejanza de expresiones irracionales. * Simplificación o reducción de expresiones irracionales algebraicas.	**Lámina 9.1**
2. OPERACIONES CON EXPRESIONES IRRACIONALES ALGEBRAICAS * Suma de expresiones con radicales semejantes. * Multiplicación y propiedades. * División y racionalización de denominador.	**Lámina 9.2**
3. ECUACIONES E INECUACIONES DE IRRACIONALES ALGEBRAICAS * Valor numérico de una expresión irracional algebraica y dominio de la variable. * Ecuación Irracional Algebraica: + Forma canónica + Método de resolución * Inecuación Irracional Algebraica. + Forma canónica + Tabla de variación del signo de los términos.	**Lámina 9.3**
4. EXPRESIONES CON VALOR ABSOLUTO * Definición e interpretación geométrica. * Resolución de Ecuaciones e Inecuaciones. * Conjunto Solución y Comprobación.	**Lámina 9.4**

LÁMINA DE PRESENTACIÓN

CONFERENCIA No. 11

UNIDAD 9: EXPRESIONES IRRACIONALES ALGEBRAICAS Y EXPRESIONES CON VALOR ABSOLUTO

CONTENIDO:

* Generalidades de las expresiones irracionales algebraicas.

* Operaciones.

* Ecuaciones e Inecuaciones con expresiones irracionales algebraicas.

* Expresiones algebraicas con Valor Absoluto.

LÁMINA 9.1

1. DEFINICION: Se llama **expresión irracional algebraica** a toda expresión algebraica con radical.

La forma normal es $a\sqrt[n]{\alpha(x)}$, donde *a* es el coeficiente y $\sqrt[n]{\alpha(x)}$ es la parte radical, con índice n ε N y radicando α(x) es una expresión racional algebraica .

Ejemplo: $5x\ \sqrt[7]{3x^2 - 2x}$, 5x es el coeficiente y $\sqrt[7]{3x^2 - 2x}$ es la parte radical.

2. Recordemos: i) la definición de $\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow y^n = x$

ii) Propiedades de los exponentes:

* $a^n a^m = a^{n+m}$ * $(ab)^n = a^n b^n$ * $(a^n)m = a^{nm}$

iii) La interpretación del índice de la raíz como exponente:
$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

Ejemplo: $\sqrt[4]{81} = 81^{\frac{1}{4}} = (3^4)^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{4}{4}} = 3$, porque $3^4 = 81$

Nota:

Sólo hay raíz de índice par para radicandos positivos: $\sqrt[n]{x^n} = x \;\; si \;\; x \geq 0$

3. Simplificada: Una expresión irracional algebraica está simplificada cuando los exponentes de los factores del radicando son menores que el índice de la raíz.

Ejemplo: Para simplificar $5\sqrt[3]{x^4\ y^5\ z^6} = 5\,x\,y\,z^2\ \sqrt[3]{x\,y^2}$

LÁMINA 9.2

OPERACIONES CON RADICALES: No siempre son posibles, la mayoría de las veces quedarán indicadas.

1. Términos Semejantes: Si las expresiones irracionales simplificadas tienen la misma parte radical, se dicen **semejantes** y pueden reducirse a un solo término.

Ejemplo: Reducir los términos semejantes:

$$3\sqrt[3]{x^4} + 5\sqrt[3]{x^7 y^6} = 3x\ \sqrt[3]{x} + 5\ x^2\ y^2\ \sqrt[3]{x} = (3x + 5\ x^2\ y^2\ )\sqrt[3]{x}$$

2. Suma y Resta: Sino se pueden reducir términos semejantes, sólo se dejarán indicados.

Ejemplo: Operar en:

$$3\ \sqrt[5]{x^6} + \sqrt[5]{x^7} - x^2\ \sqrt[5]{x} = 3x\ \sqrt[5]{x} + x\ \sqrt[5]{x^2} - x^2\ \sqrt[5]{x} = (3x - x^2)\sqrt[5]{x} + x\ \sqrt[5]{x^2}$$

3. Multiplicación: Se pueden multiplicar expresiones cuando tengan el mismo índice de raíz, o bien cuando tienen las mismas indeterminadas en el radicando.

a) Efectuar: $3\ \sqrt[4]{x^3} \bullet 14\ \sqrt[4]{ay} = 42\ \sqrt[4]{ax^3\, y}$

b) Efectuar: $2\ \sqrt{x} \bullet 3\ \sqrt[5]{x^2} = 6\ x^{\frac{1}{2}}\ x^{\frac{2}{5}} = 6\ x^{\frac{9}{10}} = 6\ \sqrt[10]{x^9}$

4. División: Cuando es posible, lo que procede es la racionalización del denominador:

a) Efectuar: $\dfrac{3x}{\sqrt[3]{2x^2}} = \dfrac{3x}{\sqrt[3]{2x^2}} \times \dfrac{\sqrt[3]{4x}}{\sqrt[3]{4x}} = \dfrac{3x\sqrt[3]{4x}}{2x} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{4x}$, si $x \neq 0$

b) Efectuar: $\dfrac{5x}{\sqrt{3}+\sqrt{2x}} = \dfrac{5x}{\sqrt{3}+\sqrt{2x}} \times \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2x}}{\sqrt{3}-\sqrt{2x}} = \dfrac{5x(\sqrt{3}-\sqrt{2x})}{3-2x}$

LÁMINA 9.3

ECUACIONES E INECUACIONES DE EXPRESIONES CON IRRACIONALES ALGEBRAICAS

I. **Valor Numérico** de una expresión irracional algebraica: es el resultado de la expresión al sustituir la variable x por valores que permitan la existencia de la raíz indicada.

Ejemplo: $\alpha(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ entonces α (3) = $\sqrt{5}$, α (-4) = $\sqrt{12}$
pero α (1) = $\sqrt{(-3)}$ no está definida

II. Dominio de una expresión irracional algebraica es el conjunto de los números reales permitidos para la variable.

Ejemplo:
Si $\alpha(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ entonces su dominio, D = {x ε R | x^2 - 4 $\geq$ 0} =]-∞ , -2[$\cup$]2, ∞[.

<u>**Nota**</u>: Si el radical tiene índice par, el radicando debe ser positivo.

III. **Ecuaciones Irracionales Algebraicas (Ecuaciones con radicales).**

Ejemplo: Resolver $\sqrt{7 - 2x} = 2 - x$ Para resolver $\sqrt{7 - 2x} = 2 - x$, se eleva al cuadrado ambos lados: 7 - 2x = 4 - 4x + x^2 x^2 - 2x - 3 = 0 entonces (x - 3)(x + 1) = 0 , donde x = -1, 3. La verificación sólo se da para x = - 1 porque $\sqrt{9}$ = 2 – (- 1) = 3, pero no la satisface x = 3, porque $\sqrt{7 - 2 \times 3}$ $\neq$ 2 - 3 = -1 Luego S = {-1}.	Para resolver una ecuación con radicales se siguen los pasos: 1. La expresión radical mas complicada se deja en un solo lado de la ecuación. 2. Ambos miembros de la ecuación se elevan al exponente que racionaliza el índice de la raíz. 3. Si quedan otros radicales, se repite el proceso hasta racionalizar completamente la ecuación. 4. Las ecuaciones obtenidas en cada paso no siempre son equivalentes, al calcular una potencia, si el exponente es par, se tienen soluciones positivas y negativas, que en algunos casos no verifican la ecuación dada al principio. 5. Por la consideración anterior siempre es necesario comprobar las soluciones y descartar las soluciones "extrañas".

IV. **Inecuaciones con radicales**: Para estas inecuaciones se deberá ser muy cuidadoso en que el conjunto solución verifique la desigualdad y también el dominio de la variable x.

Ejemplo: Para resolver $x - 3 > \sqrt{x-1}$ se elevan al cuadrado ambos lados:

$$x^2 - 6x + 9 > x - 1, \text{ entonces } x^2 - 7x + 10 > 0$$

equivale a $(x - 5)(x - 2) > 0$ con solución $]-\infty, 1[\cup]5, \infty[$, pero que no es solución de la inecuación dada que sólo admite **S =]5, ∞[.**

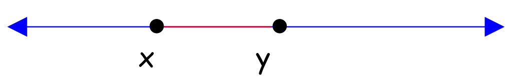
LÁMINA 9.4

EXPRESIONES CON VALOR ABSOLUTO.

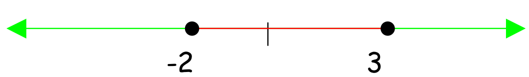
Recordemos: <u>Definición</u>: Valor absoluto de todo número real x, es $\lvert x \rvert = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$	<u>Propiedades</u> : $\lvert x \rvert \geq 0$ $\lvert x \rvert = \lvert -x \rvert$ $\lvert xy \rvert = \lvert x \rvert \lvert y \rvert$ $\lvert x + y \rvert \leq \lvert x \rvert + \lvert y \rvert$

2. Interpretación geométrica: El valor absoluto $|x - y|$ se interpreta como la distancia de x a y: d(x, y).

$d(x, y) = | y - x | = | x - y | = d(y,,x)$



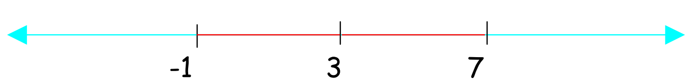
Ejemplo: Distancia entre -2 y 3 es $d(-2, 3) = | 3 - (-2) | = | -2 - 3 | = 5$



3. Ecuación.

La ecuación $| x - 3 | = 4$ se interpreta como la distancia de x a 3 es 4,

$D\ (x, 3) = 4$



Para resolver | x – 3 | = 4 se consideran

x - 3 = 4 ó x - 3 = - 4, luego S = {7, -1}

Ejemplo: Resolver | x(x - 5) | = 6, entonces se tienen las ecuaciones:

$x^2 - 5x = 6$ ó $x^2 - 5x = -6$,

$x^2 - 5x - 6 = 0$ ó $x^2 - 5x + 6 = 0$

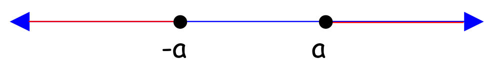
$(x - 6)(x + 1) = 0$ ó $(x - 2)(x - 3) = 0$ $\Rightarrow$ S = { 6, -1, 2, 3 }

4. Inecuaciones

Su resolución se basa en las propiedades:

i) $|x| \le a$ es $-a \le x \le a$

ii) $|x| \ge a$ es $x \ge a$ ó $x \le -a$



Resolver $\left|\frac{x-2}{x+1}\right| < 3$, que equivale a $-3 < \frac{x-2}{x+1} < 3$

Ahora se tienen que intersecar las soluciones de las dos inecuaciones:

i) $-3 < \frac{x-2}{x+1}$ o sea $\frac{4x+1}{x+1} > 0$

con solución S_1 =]-∞, -1[$\cup$] -1/4, ∞[

ii) $\frac{x-2}{x+1} < 3$ o sea $\frac{2x+5}{x+1} > 0$

con solución S_2 =]- ∞, -5/2[$\cup$]-1, ∞[

De donde $S = S_1 \cap S_2$ =]- ∞, -5/2[$\cup$] -1/4, ∞[

5. Otra definición equivalente de valor absoluto es: | x | = $\sqrt{x^2}$.

Entonces las ecuaciones anteriores se pueden resolver así:

Para resolver | x – 3 | = 4 se considera $\sqrt{(x-3)^2} = 4$, entonces $x^2 - 6x + 9 = 16$ es $x^2 - 6x - 7 = 0$ con soluciones S = {7, -1}	Para resolver | x(x - 5) | = 6, se considera $\sqrt{[x(x-5)]^2} = 6$, entonces $x^4 - 10x^3 + 25x^2 - 36 = 0$, tiene como soluciones S = { 6, -1, 2, 3 }

FICHA DE ESTUDIO No. 9
EXPRESIONES IRRACIONALES ALGEBRAICAS EXPRESIONES CON VALOR ABSOLUTO

Lámina 9.1	Generalidades de las Expresiones Irracionales Algebraicas

NOMBRE_____________________________________**FECHA**____________________

I OBJETIVOS:

Al concluir esta guía podrás:

1. Definir una expresión irracional algebraica.
2. Determinar cuando dos expresiones irracionales son iguales.
3. Simplificar expresiones irracionales algebraicas y reducirlas cuando proceda.

II ACTIVIDADES DE PREPARACION.

1. Estudia en un Texto lo siguiente:

* Definición y notación de expresión irracional algebraica.
* Condiciones de las raíces reales. Análisis del índice del radical.
* Simplificación de raíces y reducción de raíces semejantes.

2. Desarrolla los ejercicios en tu cuaderno.

III ACTIVIDADES DE EVALUACION.

1. Dada $\sqrt[3]{x}$, entonces escribe otras expresiones equivalentes:

$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[6]{}$	$\sqrt[9]{}$	$\sqrt[12]{}$

2. Escribe una expresión equivalente usando el exponente fraccionario positivo y en mínimos términos:

a) $\sqrt[3]{8x^2}$ b) $-3\sqrt[3]{x^2-y}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{0.01x+y^2}}$

3. Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt{4x^4 - 12x^2y^2 + 9y^4}$

b) $\sqrt{0.01x^4}$

c) $\sqrt{\dfrac{4x^{-10}}{25}}$

4. Indica para que valores de x existen las raíces siguientes:

a) $\sqrt{1-2x}$ b) $\sqrt[3]{\dfrac{4-x}{x}}$ c) $\sqrt{\dfrac{2x-3}{1-x}}$

5. Efectúa y escribe en la forma más simple:

a) $\sqrt{xy}\,(5\sqrt{x}-7\sqrt{y})$ b) $(\sqrt{x}-2\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})$ c) $\left(\sqrt[3]{\dfrac{x}{3}}-\sqrt[3]{\dfrac{3}{x}}\right)^2$

6. Escribe la expresión bajo un solo radical:

a) $\sqrt[5]{9\sqrt{27x^3y}}$ b) $\sqrt[3]{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{xy^2\sqrt[4]{x^3y^2}}}$

Lámina 9.2	Operaciones con las Expresiones Irracionales Algebraicas

NOMBRE______________________________________**FECHA**_____________________

I OBJETIVOS:

Al concluir esta guía podrás:

1. Efectuar operaciones con expresiones irracionales algebraicas.
2. Interpretar el índice de la raíz como el denominador del exponente fraccionario del radicando.
3. Racionalizar denominadores.

II ACTIVIDADES DE PREPARACION.

1. Estudia en un Texto lo siguiente:

* Interpretación del radical como exponente fraccionario.
* Propiedades de los exponentes aplicadas a los radicales.
* Racionalización.

2. Desarrolla los ejercicios en tu cuaderno.

III ACTIVIDADES DE EVALUACION.

1. Simplifica y reduce, si es posible:

a) $\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{a^5}{b}}$ b) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} - \sqrt[3]{\frac{a^4}{b^5}} - \sqrt[3]{\frac{ab}{b^2}}$

2. Escribe con un solo radical:

a) $\sqrt{x\sqrt[3]{x}}$ b) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$ c) $\frac{\sqrt[3]{x^2\sqrt{y}}}{\sqrt{y}}$

3. Racionaliza el denominador de:

a) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\ +\ 3}$ b) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{2\,x^2}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}\ -\ \sqrt[3]{y}}$

4. Racionaliza el numerador de:

a) $\dfrac{\sqrt{2(x+h)} - \sqrt{2x}}{h}$

b) $\left[\dfrac{1}{\sqrt{x+h}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right] \div h$

5. Simplifica:

a) $\left(\dfrac{x^{\frac{1}{3}}\, y^{\frac{1}{2}}}{x^{-1}\, y^{-2}}\right)^{-6}$ b) $\left(\dfrac{-\,x^{\frac{1}{2}}\, y^{\frac{1}{4}}}{27\, x\, y^2}\right)^{\frac{2}{3}}$

6. Indica si es verdadera o falsa cada una de las proposiciones siguientes:

a) $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, para x, y $\geq$ 0

b) $\sqrt{x^2} = x$, para cualquier número real x

c) $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$, para cualquier número real x

d) Si n es impar $\sqrt[n]{x^n} = x$, para cualquier número real x

e) Si n es par $\sqrt[n]{x^n} = x$, para cualquier número real x

Lámina 9.3	Ecuaciones e Inecuaciones de Expresiones Irracionales

NOMBRE______________________________________FECHA_____________________

I OBJETIVOS:

Al concluir esta guía podrás:

1. Calcular el valor numérico de una expresión irracional algebraica.
2. Resolver ecuaciones donde intervengan expresiones irracionales algebraicas.
2. Resolver inecuaciones donde intervengan expresiones irracionales algebraicas.

II ACTIVIDADES DE PREPARACION.

1. Estudia en un Texto lo siguiente:

* El dominio de la variable en una expresión irracional algebraica.
* La solución de ecuaciones con expresiones irracionales algebraicas.
* La solución de inecuaciones con expresiones irracionales algebraicas.

2. Desarrolla los ejercicios en tu cuaderno.

III ACTIVIDADES DE EVALUACION.

1. Calcula el valor de $\sqrt{x^2 + 3x}$ para x igual a:

a) $\sqrt{3}$ b) $1 - \sqrt{2}$ c) $(3 + \sqrt{2})/2$

2. ¿Cuáles son los valores permitidos para el radicando dado en el ejercicio anterior?

3. Resuelve la ecuación y comprueba su conjunto solución:

a) $2x - 3 = \sqrt{7x - 3}$ b) $\sqrt{x} + \sqrt{2} = \sqrt{x + 2}$ c) $\sqrt{5 + \sqrt{x}} = \sqrt{x} - 1$

4. Escribe el resultado en la forma de una ecuación:

a) $P=\pi\sqrt{\frac{e}{g}},\ para\ \ g$ b) $y=\frac{1}{\sqrt{1\ -\ x}}$ para x

5. Halla la medida de la circunferencia de un círculo de área 128 cm^2.

6. Halla el radio de la base de un cono recto con altura de 6 cm. y volumen de 201 cm^3.

7. Halla el volumen del cubo circunscrito a una esfera de volumen igual a 1000 cm^3.

8. Resuelve, comprueba y grafica la solución de:

a) $\sqrt{2x+3}>x$ b) $\sqrt{2x+3}>\sqrt{x}$

9. Comprueba que:

a) si $0 < x < 1$, entonces $\sqrt{x} > x$.

b) si $x > 1$, entonces $\sqrt{x} < x$.

Lámina 9.4	Expresiones con Valor Absoluto

NOMBRE______________________________________FECHA_____________________

I OBJETIVOS:

Al concluir esta guía podrás:

1. Interpretar geométricamente el valor absoluto.
2. Resolver ecuaciones e inecuaciones donde intervengan el valor absoluto.

II ACTIVIDADES DE PREPARACION.

1. Estudia en un Texto lo siguiente:

* Definición de valor absoluto y sus propiedades.
* Interpretación geométrica en la recta numérica.
* La solución de ecuaciones con valor absoluto.
* La solución de inecuaciones con valor absoluto.

2. Desarrolla los ejercicios en tu cuaderno.

III ACTIVIDADES DE EVALUACION.

1. Halla el resultado exacto de las expresiones siguientes:

a) $|3-\pi|$ b) $|\sqrt{2}-\sqrt{3}|$ c) $|\sqrt{2}-2^{-1}|$

2. Halla el conjunto de todas las x ε R que satisfacen:

a) $|3x-2|=7$ b) $|x^2-3|=1$ c) $|x-1|=|2x-1|$

3. Grafica y escribe en notación de intervalo los siguientes conjuntos:

a) $|x|\leq 4$ b) $|x-3|\leq 2$ c) $|x+2|>5$

4. Escribe los siguientes intervalos en la forma $| x - a | \leq b$:

a)]-3, 3[b) [-2, 4] c)]- ∞, -2] $\cup$ [2, ∞ [

5. Compruebe que el punto medio del intervalo [a, b] es ½(a + b).

6. Dé el conjunto solución de las x ε R en notación de intervalo y su respectiva gráfica:

a) $| 3 - 2x | \leq 1$ b) $| x/(x + 3) | \leq 1$

c) $| x^2 + 3x | > 4$ d) $| x^2 - 4 | \geq 5$

7. Comprueba con números las propiedades siguientes:

a) $| x + y | \leq | x | + | y |$ b) $| x + y | \geq |x| - | y |$

c) $| x - y | \leq | x | + | y |$ d) $| x - y | \geq | x | - | y |$

8. Ilustra las propiedades anteriores con la relación que existe entre un lado de un triángulo y los dos restantes.

LABORATORIO: CUESTIONARIO No. 11		UNIDAD 9 Examen de Fichas sobre Láminas 9.1 a 9.4
Expresiones Irracionales y Expresiones con V. Absoluto	**Conferencia No. 11**	**CALIFICACION**

DESARROLLO	CORRECCION
I Escriba su respuesta en el espacio dado (5% c/u) 1. Factorice $x^{-3/2} + x^{-1/2} = x^{-3/2}(\qquad\qquad)$ 2. Escriba con un solo radical $\sqrt[3]{x\sqrt{x}} =$ 3. Escriba con un solo radical $\sqrt[3]{x}\ \sqrt{x} =$ 4. La expresión $\sqrt{x^2 - x}$ existe si x 5. El conjunto solución de $\|1 - x\| > 2$ es **II.** Ejercicios (15%): 1. Opere: $\dfrac{\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\dfrac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}} =$	

2. Racionalice el denominador de:

$$\frac{\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}}$$

3. Resuelva $\sqrt{5+\sqrt{x}} = \sqrt{x} - 1$

4. Halle el conjunto solución de:

$$\left| \frac{x+1}{x} \right| \leq 5$$

5. Resuelva $\sqrt{x^2+3x} > 2x$

RESPUESTAS

UNIDAD 9: EXPRESIONES IRRACIONALES ALGEBRAICAS Y VALOR ABSOLUTO.

Lámina 9.1

1. a) $\sqrt[6]{x^2}$ b) $\sqrt[9]{x^3}$ c) $\sqrt[12]{x^4}$ **2.** a) $2x^{\frac{2}{3}}$ b) $-3(x^2 - y)^{\frac{1}{3}}$ c) $\dfrac{1}{(0.01x + y^2)^{\frac{1}{2}}}$

3. a) $\left|2x^2 - 3y^2\right|$ b) $0.1x^2$ c) $\dfrac{2}{5\left|x^5\right|}$ **4.** a) $x \le \frac{1}{2}$ b) $\Re$ - {0} c)]1, 3/2]

5. a) $5x\sqrt{y} - 7y\sqrt{x}$ b) $x - \sqrt{3x} - 6$ c) $\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{9}} - 2 + \sqrt[3]{\dfrac{9}{x^2}}$ **6.** a) $\sqrt[10]{2187x^3y}$

b) $\sqrt[12]{x^7}$ c) $\sqrt[24]{x^7y^{10}}$.

Lámina 9.2

1. a) $\sqrt{\dfrac{a}{b}}(1 - a^2)$ b) $-\dfrac{a}{b}\sqrt[3]{\dfrac{a}{b^2}}$ **2.**a) $\sqrt[3]{x^2}$ b) $\sqrt[6]{x}$ c) $\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{y}}$ **3.**a) $\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3)}{x - 9}$

b) $\dfrac{5\sqrt[3]{4x}}{2x}$ c) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}{x - y}$ **4.**a) $\dfrac{2}{\sqrt{2((x+h)} + \sqrt{2x}}$ b) $\dfrac{-1}{\sqrt{x^2 + xh}(\sqrt{x} + \sqrt{x+h})}$

5. a) $\dfrac{1}{x^8y^{15}}$ b) $\dfrac{1}{9y\sqrt[6]{x^2y}}$ **6.** a) Falsa, sólo es verdadera si x = 0, y = 0.

b) Falsa, sólo es verdadera si $\sqrt{x^2} = |x|$ c) Falsa, sólo es verdadera si x $\ge$ 0. d) Verdadera

e) Falsa, sólo es verdadera si $\sqrt[n]{x^n} = |x|$.

Lámina 9.3

1. a) $\sqrt{3 + 3\sqrt{3}}$ b) $\sqrt{6 - 5\sqrt{2}}$ no es real c) $\sqrt{10 + \frac{9}{2}\sqrt{2}}$ **2.**]-∞, - 3] $\cup$ [0, ∞[.

3. a) x = 4, porque x = ¾ es solución "extraña" b) x = 0 c) x = 16, porque x = 1 es solución "extraña". **4.** a) $g = \dfrac{\pi^2 e}{p^2}$ b) $x = \dfrac{y^2 - 1}{y^2}$ **5.** C = 2π r = $16\sqrt{2\pi}$

6. $r = \sqrt{\dfrac{67}{2\pi}}$ **7.** 6000/π **8.** a)]- 1, 3[b) [0, ∞[**9.** a) La inecuación x^2 - x < 0, tiene como solución]0, 1[b) La inecuación x^2 - x > 0, tiene como solución]1, ∞[.

Lámina 9.4

1. a) π - 3 b) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ c) $\sqrt{2} - 2^{-1}$ **2.** a) {3, - 5/3} b) {$\pm$ 2, $\pm\sqrt{2}$ } c) {0, 2/3}.

3. a) [- 4, 4] b) [1, 5] c)]-∞, - 7[$\cup$]3, ∞[. **4.** a) $|x| < 3$ b) $|x - 1| < 3$ c) $|x| \ge 2$.

5. d(a, $\frac{1}{2}(a + b)$) = $\left|\frac{1}{2}(b - a)\right| = \left|\frac{1}{2}(a - b)\right|$ = d(b, $\frac{1}{2}(a + b)$) **6.** Las inecuaciones pueden resolverse aplicando la propiedad $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$ o bien la definición $|x| \le a \Leftrightarrow \sqrt{x^2} \le a$.

Entonces: a) $|3 - 2x| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le 3 - 2x \le 1$ cuya solución S = [1, 2], o bien $\sqrt{(3 - 2x)^2} \le 1$ que equivale a resolver x^2 - 3x + 2 $\le$ 0 con la misma solución S = [1, 2].

b) Equivale a resolver $-1 \leq \frac{x}{x+3} \leq 1$ que se desdobla en $\frac{2x+3}{x+3} \geq 0$ y $\frac{3}{x+3} \geq 0$ con solución S =$[-\frac{3}{2}, \infty[$, o bien $\left(\frac{x}{x+3}\right)^2 \leq 1$ desarrollada como $\frac{2x+3}{(x+3)^2} \geq 0$ con solución S = $[-\frac{3}{2}, \infty[$.

c) Equivale a resolver $x^2 + 3x > 4$ unida a $x^2 + 3x < -4$ con solución S $=]-\infty, -4[\cup]1, \infty[$.
O bien $(x^2 + 3x)^2 > 16$ o sea $x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 16 > 0$ con solución S $=]-\infty, -4[\cup]1, \infty[$.
d) Equivale a resolver $x^2 - 4 \geq 5$ unida a $x^2 - 4 \leq -5$ con solución S $=]-\infty, -3[\cup]3, \infty[$.
O bien $(x^2 - 4)^2 \geq 25$ o sea $x^4 - 8x^2 - 9 \geq 0$ con solución S $=]-\infty, -3[\cup]3, \infty[$.
7. y **8.** Quedan al lector.

CUESTIONARIO.

I. 1. $(1 + x)$ 2. $\sqrt{x}$ 3. $\sqrt[6]{x^5}$ 4. $]-\infty, 0[\cup]1, \infty[$ 5. $]-\infty, -1[\cup]3, \infty[$

II. 1. $-(1+\sqrt{x})$ 2. $\frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{y}$ 3. x = 16, pero x = 1 no la cumple.

4. S $=]-\infty, -1/6[\cup]1/4, \infty[$ 5. $]0, 1[$.